41. Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik. II.

Von Tadasi NAKAYAMA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1936.)

Aus den Resultaten in einer vor kurzem erschienen Arbeit von A. Albert[1] und in meiner früheren Arbeit[2] erhält man den folgenden Satz, der, wie es mir scheint, eine fundamentale Bedeutung für die Struktur der Algebren über den Körpern von der Primzahlcharakteristik hat.

Satz. *K sei ein Körper der Primzahlcharakteristik p. Dann wird jede (Brauersche) Algebrenklasse $\mathfrak{A}$ mit dem p-Potenzindex über K durch ein direktes Produkt von zyklischen Algebren dargestellt. Insbesondere besitzt $\mathfrak{A}$ (separable) abelsche Zerfällungskörper.*

Zunächst beweisen wir

Hilfssatz. (Zusatz zu A, Theorem 3.) Eine normal-einfache Algebra A vom Grad $n=p^g$ über K besitze einen über K einfachen, vollständig-inseparablen maximalen Unterkörper $K(\alpha):\alpha^n=a\in K$, und A besitze keinen vollständig-inseparablen Zerfällungskörper vom niedrigeren Grad als n. Dann ist A zyklisch und wird in der Form

$$A=(a, Z, S)=Z+\alpha Z+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}Z\,; \qquad \alpha^{-1}z\alpha=z^S \qquad (z\in Z)$$

dagestellt, wo Z einen zyklischen maximalen Unterkörper von A, und S einen erzeugenden Automorphismus von Z/K bedeutet.[3]

Beweis. Der Hilfssatz ist nichts anderes als A, Theorem 1, wenn $n=p$ d.h. $g=1$ ist. Es sei also $g\geqq 2$. Um die Behauptung durch Induktion zu beweisen, nehmen wir an, dass die Behauptung für die Algebren mit den niedrigeren p-Potenzindizen als p^g schon bewiesen ist.

A' sei die normal-einfache Algebra über $K(\alpha^{\frac{n}{p}})=K'$, die aus den sämtlichen mit K' elementweise vertauschbaren Elementen aus A besteht. Bekanntlich[4] ist dann $A_{K'}\sim A'$. Also besitzt A' keinen über K' vollständig-inseparablen Zerfällungskörper vom niedrigeren Grad als $\frac{n}{p}$. Nach der Induktionsannahme enthält A' einen zyklischen maximalen Unterkörper Z' derart, dass $\alpha^{-1}z'\alpha=z'^{S'}$ für jedes z' aus Z' gilt (S':

1) A. Albert: Normal division algebras of degree p^e over F of characteristic p. Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), S. 183–188 (zitiert mit A).

Für das Folgende vgl. auch E. Artin und O. Schreier: Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. Abhandl. math. Sem. Hamburg **5** (1927), 225–231 und A. Albert: Cyclic fields of degree p^n over F of characteristic p. Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), S. 625–631.

2) T. Nakayama: Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik. Proc. **11** (1935), 305–306 (zitiert mit N).

3) Leider kann ich noch nicht entscheiden, ob solche Algebra A stets eine Divisionsalgebra ist oder nicht.

4) Siehe z.B. E. Noether: Nichtkommutative Algebra. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 514–541.

ein erzeugender Automorphismus von Z'/K'). Wie beim Beweis von A, Theorem 3 nehmen wir eine zyklische Erweiterung Z_0/K mit $Z'=Z_0\times K'$. Z_0 ist dann kein Zerfällungskörper von A. Denn: ist gegen die Behauptung etwa

$$A\sim(a_0, Z_0, S_0)\,; \qquad a_0\in K,$$

so ist $K(a_0^{\frac{n}{p}})$ ein vollständig-inseparabler Zerfällungskörper vom niedrigeren Grad als n. Daher bildet die Gesamtheit der mit Z_0 elementweise vertauschbaren Elemente aus A eine Divisionsalgebra vom Index p. Also kann man ganz analog wie beim Albertschen Beweis von A, Theorem 3 vorgehen.[5]

Beweis des Satzes. L sei ein über K vollständig-inseparabler Zerfällungskörper des Minimumgrades von $\mathfrak{A}$, der nach meiner Arbeit N sicher existiert: $L=K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_t)$. Ohne weiteres können wir annehemen, dass α_1 nicht in $L_1=K(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_t)$ enthalten ist. $\alpha_1^{p^h}$ sei die niedrigste Potenz von α_1, die in L_1 liegt: $h\geqq 1$. Weiter sei A_1 die zu $\mathfrak{A}_{L_1}$ gehörige Algebra vom Grad p^h über L_1. Man kann dann L als einen maximalen Unterkörper von A_1 ansehen. Nach der Minimaleigenschaft von L besitzt A_1 keinen vollständig-inseparablen Zerfällungskörper vom niedrigeren Grad als p^h über L_1. A_1 wird also in der Form

$$A_1=(a_1, Z_1, S_1)\,; \qquad a_1=\alpha_1^{p^h}\in L_1$$

dargestellt, wo Z_1 zyklisch vom Grad p^h über L_1 ist.

Nun sei $a=\alpha_1^{p^k}$ die kleinste, in K liegende Potenz von α_1, und Z sei ein Z_1 umfassender zyklischer Körper vom Grad p^k über L_1, der sicher existiert. Dann gilt

$$(a, Z, S)\sim A_1\in\mathfrak{A}_{L_1},$$

wo S eine Erweiterung von S_1 zu Z/L_1 bedeutet.[6] Nimmt man nach A, Theorem 2 einen zyklischen Körper Z' über K derart, dass $Z=Z'\times L_1$ ist, so ist

$$(a, Z', S)_{L_1}=(a, Z, S).$$

$\mathfrak{B}$ sei die Algebrenklasse der *zyklischen* Algebra (a, Z', S) über K. Dann ist L_1 der Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$. Da aber $(L_1:K)<(L:K)$ ist, so beweist man unseren Satz leicht durch die Induktion nach dem Grad $(L:K)$.

Bemerkung. Ist insbesondere $(K^{p^{-1}}:K)=p$, so ist jede nicht-zerfallende normaleinfache Algebra mit dem p-Potenzindex über K zyklisch. Dies folgt unmittelbar aus A, Theorem 3, N, 3 und der in 1) zitierten zweiten Arbeit von A. Albert.

---

5) In dem Albertschen Beweis steht ein kleiner Fehler. Nämlich: es gibt keinen Körper $K(x_{e0})=K\times Z_e$ in D, der in A, S. 188 geschrieben ist. Man hat aber nur vom Anfang den Körper $F(x_{e0})$ zu betrachten.

6) Siehe z.B. K. Shoda: Bemerkungen über die Faktorensysteme einfacher hyperkomplexer Systeme. Japanese Journ. Math. **10** (1933), S. 57–70, §1.