PAPERS COMMUNICATED

39. *Zur Theorie der Affinorübertragung.*

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Seminar, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1936.)

1. In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n, welche als die Basisgruppe die Gruppe aller Koordinatentransformationen, die sich mittels analytischer Funktionen definieren lassen, zugrundlegt, wird ein Affinor (in einem Punkt) in je einem Koordinatensystem durch ein geordnetes System von derselben Anzahl N der Werte v^A, $A=1, 2, \ldots\ldots, N$, angegeben; die Bestimmungszahlen v^A und v^L in den Koordinatensystemen x^a und x^λ sich folgendermassen verhalten:

$$(1) \qquad v^L = P^L_A v^A \qquad (L=a_1, a_2, \ldots\ldots, a_N\,;\; A=1, 2, \ldots\ldots, N)\,.$$

Die Koeffizienten P^L_A sind rationale Funktionen der partiellen Differentialquotienten erster Ordnung P^λ_a der Transformation $x^\lambda = x^\lambda(x^a)$. Man setzt voraus, dass man das Anfangssystem der N Werte v^A in einem Koordinatensystem x^a ganz beliebig annehmen kann. Die Gesamtheit der linearen homogenen Transformationen von der Gestalt (1) ist isomorph mit der Gruppe der linearen Transformationen

$$(2) \qquad v^\lambda = P^\lambda_a v^a\,.$$

Wenn man nun den Körper der Affinoren nur von der bestimmten Art (1) in Betracht zieht und in jeden einander benachbarten Elementen z.B. Linien- od. Flächenelementen von X_n die affine Zuordnung solcher Affinorkörper definiert, so entsteht eine Übertragung. Sie wird analytisch von den Pfaffschen Ausdrücken der erweiterten Koordinaten der Elemente

$$(3) \qquad \Pi^A_B \qquad (A, B=1, 2, \ldots\ldots, N)$$

bestimmt; mit solchen Übertragungen haben schon Herrn A. Kawaguchi, S. Hokari und V. Hlavatý[1] beschäftigt. Wenn die Übertragungsparameter Γ^λ_μ bezüglich des gewöhnlichen Vektorkörpers vorhanden sind, so induziert eine Übertragung mit den Parametern Γ^A_B, die aus Γ^λ_μ linear homogen gebildet werden. Z.B. für die p-Vektorübertragung haben wir ohne weiteres $(A=\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_p,\ B=\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots \mu_p)$

$$(4) \qquad \Gamma^A_B \equiv \overset{p}{\Gamma}{}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}_{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]} = \Gamma^{\lambda_1}_{[\mu_1}\delta^{\lambda_2\cdots\lambda_p}_{\mu_2\cdots\mu_p]} + \Gamma^{\lambda_2}_{[\mu_2}\delta^{\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_p}_{\mu_1\mu_3\cdots\mu_p]} + \cdots\cdots + \Gamma^{\lambda_p}_{[\mu_p}\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}]}$$

$$(\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} = \delta^{\lambda_1}_{\mu_1}\delta^{\lambda_2}_{\mu_2}\cdots\cdots\delta^{\lambda_{p-1}}_{\mu_{p-1}} \text{ gesetzt})\,.$$

2. Π^A_B sei vorgegeben. Wenn man ferner die Übertragung des Affinorkörpers anderer Art betrachten will, so erscheint es nur defini-

1) A. Kawaguchi, Theory of Connections in the Generalized Finsler Manifold, II, Proc. **8** (1932), 340–343; S. Hokari, Über die Bivektorübertragung, Journal of the Hokkaido Imperial University, (I) 2 (1934-35), S. 103–117; V. Hlavatý, Espaces abstraits courbes de König, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 59 (1935), S. 1–39.

tionsweis möglich. In vielen Fälle kann man aber aus Π^A_B eine oder einige gewöhnliche affine Übertragung mit den Parametern Γ^λ_μ herleiten, was nicht nur interessant ist, sondern auch der invariantentheoretischen Studierung von Π^A_B endgültigen Schluss gibt. Man darf nämlich nur die Parameter Γ^λ_μ aus Π^A_B und den Affinor $\Pi^A_B-\Gamma^A_B$ studieren.

Setzt man

$$\overset{p}{\underset{m}{\Gamma}}{}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-m}} \equiv \overset{p}{\Gamma}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}\nu_1\cdots\nu_m}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}\nu_1\cdots\nu_m}, \qquad \Gamma\equiv\Gamma^\nu_\nu,$$

so folgt

$$\text{(5a)} \qquad \overset{p}{\underset{1}{\Gamma}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} = \frac{(n-p)}{p}\overset{p-1}{\Gamma}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} + \frac{1}{p}\Gamma\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}_{[\mu_1\cdots\mu_{p-1}]} \qquad (p\geqq 2)$$

und mit deren Hilfe erhält man induktiv

$$\text{(5b)} \qquad \overset{p}{\underset{m}{\Gamma}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} = \overset{p}{\underset{m}{a}}\overset{p-m}{\Gamma}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} + \overset{p}{\underset{m}{b}}\Gamma\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{[\mu_1\cdots\mu_{p-m}]},$$

wobei

$$\overset{p}{\underset{m}{a}} = \frac{(n-p)(n-p+1)\cdots\cdots(n-p+m-1)}{p(p-1)\cdots\cdots(p-m+1)},$$

$$\overset{p}{\underset{m}{b}} = \frac{m(n-p+1)\cdots\cdots(n-p+m-1)}{p(p-1)\cdots\cdots(p-m+1)} \qquad (n-1>p-1\geqq m\geqq 2)$$

gesetzt sind. Überschiebend (5a) für $p=2$ und (5b) $m=p-1$ für $p\geqq 3$, folgt

$$\Gamma = \frac{(p-1)!}{(n-p+1)\cdots\cdots(n-1)}\cdot\overset{p}{\underset{p}{\Gamma}}$$

und wegen (5a, b)

$$\text{(6)} \qquad \overset{p-m}{\Gamma}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} = \overset{p}{\underset{m}{c}}\overset{p}{\underset{m}{\Gamma}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} - \overset{p}{\underset{m}{d}}\overset{p}{\underset{p}{\Gamma}}\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{[\mu_1\cdots\mu_{p-m}]} \qquad (p-1>m\geqq 1),$$

wo

$$\text{(7)} \qquad \overset{p}{\underset{m}{c}} = \frac{p(p-1)\cdots\cdots(p-m+1)}{(n-p)(n-p+1)\cdots\cdots(n-p+m-1)},$$

$$\overset{p}{\underset{m}{d}} = \frac{m\cdot(p-1)!}{(n-p)(n-p+1)\cdots\cdots(n-1)}.$$

Schreibt man für die p-Vektorübertragungsparameter $\overset{p}{\Pi}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}$

$$\overset{p}{\underset{m}{\Pi}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} \equiv \overset{p}{\Pi}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}\nu_1\cdots\nu_m}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}\nu_1\cdots\nu_m},$$

so erhält man den

Satz 1. *Sind* $\overset{p}{\Pi}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{[\mu_1\cdots\mu_p]}$ *die Parameter einer* $p(<n)$-*Vektorübertragung, so werden*

$$\text{(8)} \qquad \overset{p}{\underset{m}{c}}\overset{p}{\underset{m}{\Pi}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} - \overset{p}{\underset{m}{d}}\overset{p}{\underset{p}{\Pi}}\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{[\mu_1\cdots\mu_{p-m}]}$$

die Parameter einer $(p-m)$-*Vektorübertragung, insbesondere für* $m=p-1$ *die gewöhnlichen affinen Übertragungsparameter.*

Denn die Differenz $\overset{p}{\Pi}{}^A_B-\overset{p}{\Gamma}{}^A_B$ folglich auch

$$\overset{p}{\underset{m}{c}}(\overset{p}{\underset{m}{\Pi}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}} - \overset{p}{\underset{m}{\Gamma}}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}}) - \overset{p}{\underset{m}{d}}(\overset{p}{\underset{p}{\Pi}} - \overset{p}{\underset{p}{\Gamma}})\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}_{[\mu_1\cdots\mu_{p-m}]}$$

sind je ein Affinor.

Satz 2. *Wenn bei einer Bivektorübertragung ein beliebiger ein-*

facher Bivektor stets wieder in einen einfachen parallel verschoben wird, dann ist die Übertragung aus einer gewöhnlichen affinen Übertragung erweitert, welche mit (8) *für* $m=p-1=1$ *übereinstimmt.*

Ist $v^{[\lambda_1\lambda_2]}$ einfach, so besteht

$$v^{[\lambda_1\lambda_2}v^{\lambda_3]\nu}=0 \qquad \text{oder} \qquad v^{\lambda_1\lambda_2}v^{\lambda_3\nu}+v^{\lambda_2\lambda_3}v^{\lambda_1\nu}+v^{\lambda_3\lambda_1}v^{\lambda_2\nu}=0\,.$$

Dafür, dass der verschobene Bivektor einfach sei, ist es notwendig und hinreichend:

$$\sum v^{\lambda_1\lambda_2}\Pi_{\rho\sigma}^{\lambda_3\nu}v^{\rho\sigma}+\sum v^{\lambda_3\nu}\Pi_{\rho\sigma}^{\lambda_1\lambda_2}v^{\rho\sigma}=0$$

($\sum$ bedeutet die zyklische Summe bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). Darin setzt man $v^{[\lambda_1\lambda_2]}=\underset{1}{v}^{[\lambda_1}\underset{2}{v}^{\lambda_2]}$, und aus den Koeffizienten von $\underset{1}{v}^{\alpha}\underset{1}{v}^{\beta}\underset{2}{v}^{\rho}\underset{2}{v}^{\sigma}$ erhält man

$$\sum \delta_{(\alpha}^{\lambda_1}\overset{2}{\Pi}{}_{\beta)(\rho}^{\lambda_3\nu}\delta_{\sigma)}^{\lambda_2}+\sum \delta_{(\alpha}^{\lambda_3}\overset{2}{\Pi}{}_{\beta)(\rho}^{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\sigma)}^{\nu}=\sum \delta_{(\alpha}^{\lambda_2}\overset{2}{\Pi}{}_{\beta)(\rho}^{\lambda_3\nu}\delta_{\sigma)}^{\lambda_1}+\sum \delta_{(\alpha}^{\nu}\overset{2}{\Pi}{}_{\beta)(\rho}^{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\sigma)}^{\lambda_3}\,.$$

Überschiebend in Bezug auf $\nu=\sigma$, erhält man

$$(n-2)\sum \delta_{(\alpha}^{\lambda_1}\overset{2}{\Pi}{}_{\beta)\rho}^{\lambda_2\lambda_3}=\sum \delta_{\rho}^{\lambda_1}\delta_{(\alpha}^{\lambda_2}\overset{2}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\beta)}^{\lambda_3}-\sum \delta_{\rho}^{\lambda_2}\delta_{(\alpha}^{\lambda_1}\overset{2}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\beta)}^{\lambda_3}\,,$$

und, ferner überschiebend in Bezug auf $\lambda_1=\alpha$,

$$(n-1)(n-2)\overset{2}{\Pi}{}_{\beta\rho}^{\lambda_2\lambda_3}=2(n-1)(\delta_{[\rho}^{\lambda_3}\overset{2}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\beta]}^{\lambda_2}+\delta_{[\beta}^{\lambda_2}\overset{2}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\rho]}^{\lambda_3})-2\delta_{[\rho}^{\lambda_3}\delta_{\beta]}^{\lambda_2}\overset{2}{\underset{2}{\Pi}}\,,$$

daraus ergibt sich

$$\overset{2}{\Pi}{}_{\beta\rho}^{\lambda_2\lambda_3}=\delta_{[\rho}^{\lambda_3}\Gamma_{\beta]}^{\lambda_2}+\delta_{[\beta}^{\lambda_2}\Gamma_{\rho]}^{\lambda_3}\,,$$

wobei

$$\Gamma_{\beta}^{\lambda_2}=\frac{2}{n-2}\overset{2}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\beta}^{\lambda_2}-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\delta_{\beta}^{\lambda_2}\overset{2}{\underset{2}{\Pi}}$$

gesetzt ist. Q.E.D.[1)]

3. Π_B^A sei die Parameter der Übertragung für den Körper von symmetrischen Affinoren (Tensoren) p-ter Stufe. Z.B. aus einer gewöhnlichen affinen Übertragung Γ_μ^λ wird die folgende Übertragung induziert:

$$\Gamma_B^A\equiv\Gamma_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_p)}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}=\Gamma_{(\mu_1}^{\lambda_1}\delta_{\mu_2\cdots\mu_p)}^{\lambda_2\cdots\lambda_p}+\Gamma_{(\mu_2}^{\lambda_2}\delta_{(\mu_1\mu_3\cdots\mu_p)}^{\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_p}+\cdots\cdots+\Gamma_{(\mu_p}^{\lambda_p}\delta_{\mu_1\cdots\mu_{p-1})}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}\,.$$

Ganz analog wie Satz 1 erhält man den

Satz 3. *Sind* $\overset{p}{\Pi}{}_{(\mu_1\cdots\mu_p)}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}$ *die genannten Übertragungsparameter, so werden*

$$\underset{m}{\overset{p}{e}}\,\overset{p}{\underset{m}{\Pi}}{}_{(\mu_1\cdots\mu_{p-m})}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}-\underset{m}{\overset{p}{f}}\,\overset{p}{\underset{p}{\Pi}}\,\delta_{(\mu_1\cdots\mu_{p-m})}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}$$

die Parameter einer Übertragung für den Tensorkörper $(p-m)$*-ter Stufe, insbesondere für* $m=p-1$ *die gewöhnlichen affinen Übertragungsparameter, wo*

$$\overset{p}{\underset{m}{\Pi}}{}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}}\equiv\overset{p}{\Pi}{}_{\mu_1\cdots\mu_{p-m}\nu_1\cdots\nu_m}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-m}\nu_1\cdots\nu_m}\,,$$

$$\underset{m}{\overset{p}{e}}=\frac{p(p-1)\cdots\cdots(p-m+1)}{(n+p)(n+p-1)\cdots\cdots(n+p-m+1)}\,,\quad \underset{m}{\overset{p}{f}}=\frac{m\cdot(p-1)\,!}{(n+p)(n+p-1)\cdots\cdots(n+1)}\,.$$

Man kann die einfache Methode, welche wir oben angenommen haben, auf die verschiedenen Übertragungsparameter für den Körper von komplizierter Affinoren, z.B. Affinoren mit einer Dichte anwenden.

---

1) Man kann diesen Satz für die p-Vektorübertragung erweitert werden.