58. Geometrie des Integrals $\int (Ly'''+M)dx$.

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Seminar, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1936.)

In der letzten Arbeit habe ich die Theorie einer allgemeinen Massbestimmung $\int F(x, y, y', y'', y''')dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen behandelt.[1] Im Folgenden möchte ich mich mit einer der dabei ausgeschlossenen Fälle beschäftigen, wo F die Gestalt $L(x, y, y', y'')y'''+M(x, y, y', y'')$ annimmt.

Wir setzen drei von vier invarianten Pfaffschen Ausdrücken in der folgenden Gestalt voraus:

$$\omega = Ldy''+Mdx+\alpha\delta y'+\beta\delta y\,, \tag{1}$$

$$\omega_1=\lambda\delta y\,, \qquad \omega_2=\mu(\delta y'+\gamma\delta y)\,,$$

und fordern

$$\text{[I]} \qquad \omega'\equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)\,,$$

woraus folgt

$$\alpha=M_{y''}-DL \qquad (DL\equiv L_{y'}y''+L_y y'+L_x)\,. \tag{2}$$

Mittels des vierten Pfaffschen Ausdrucks ω_3 stellen wir die Forderungen

$$\text{[II]} \qquad \omega_1'\equiv[\omega_2\omega_3] \quad (\text{mod. } \omega_1)\,,$$

$$\text{[III]} \qquad \omega_2'\equiv[\omega\omega_3] \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

auf, woraus ergeben sich

$$\omega_3\equiv -\frac{\lambda}{\mu}dx \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)\,, \tag{3}$$

$$\mu^2=\lambda L\,. \tag{4}$$

Da nach (1), [I]

$$\omega'\equiv[(\alpha_{y''}-L_{y'})dy''+(\beta+D\alpha-M_{y'})dx, \delta y'] \quad (\text{mod. } \omega_1)$$

$$(D\alpha\equiv\alpha_{y'}y''+\alpha_y y'+\alpha_x)\,,$$

so behandeln wir jede der zwei Fälle $\alpha_{y''}-L_{y'}\neq 0$ oder $=0$ folgendermassen:

(A) $\alpha_{y''}-L_{y'}\neq 0$. Dann werden β, μ (folglich λ nach (4)) so bestimmt:

$$\beta=\frac{M}{L}(\alpha_{y''}-L_{y'})+(M_{y'}-D\alpha)\,, \tag{5}$$

$$\mu=L^{-1}(\alpha_{y''}-L_{y'})\,, \qquad \lambda=L^{-3}(\alpha_{y''}-L_{y'})^2\,, \tag{6A}$$

indem man fordert:

$$\text{[I'A]} \qquad \omega'\equiv[\omega\omega_2] \quad (\text{mod. } \omega_1)\,.$$

1) H. Hombu, Invariantentheorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''')dx$, Proc. **12** (1936), S. 156.

Vier Pfaffschen Ausdrücke sind nun bestimmt bis auf die Transformationen von der Gestalt

$$\bar{\omega}=\omega\,,\quad \bar{\omega}_1=\omega_1\,,\quad \bar{\omega}_2\equiv\omega_2\ (\text{mod. }\omega_1)\,,\quad \bar{\omega}_3\equiv\omega_3\ (\text{mod. }\omega_1,\omega_2)\,.$$

Wenn man also an Stelle der Forderungen [I′], [III] die folgenden

$$[\mathrm{I}''\mathrm{A}]\qquad \omega'=[\omega\omega_2]+a_{12}[\omega_1\omega_2]+a_{13}[\omega_1\omega_3]\,,$$

$$[\mathrm{III}'\mathrm{A}]\qquad \omega_2'=[\omega\omega_3]+\sum_{(i,j)}^{1,2,3}c_{ij}[\omega_i\omega_j]$$

setzt (a_{12}, a_{13}, c_{ij}: noch unbekannte Invarianten), so kann man leicht bestätigen, dass $\omega-\omega_3$ sich völlig bestimmen.

(B) $a_{y''}-L_{y'}=0$. Bestimmt man auch nach (5) die Funktion β, so haben wir

$$(7)\qquad \omega'=[\delta y', (L_y-\beta_{y''})dy''+(M_y-D\beta)dx+(a_y-\beta_{y'})\delta y']\,;$$

da aber

$$\begin{aligned}L_y-\beta_{y''}&=L_y-(M_{y'}-Da)_{y''}=L_y-M_{y'y''}+Da_{y''}+a_{y'}\\&=L_y-M_{y'y''}+DL_{y'}+(M_{y''}-DL)_{y'}=0\,,\end{aligned}$$

so fordern wir unter der Voraussetzung $M_y-D\beta\neq0$

$$[\mathrm{I}'\mathrm{B}]\qquad \omega'=[\omega_1\omega_3]+a_{12}[\omega_1\omega_2]$$

(a_{12}: noch unbekannt), woraus folgt, berücksichtigt auf (4),

$$(6\mathrm{B})\qquad \lambda=\left(L(D\beta-M_y)^2\right)^{\frac{1}{3}},\qquad \mu=\left(L^2(D\beta-M_y)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ferner durch den folgenden Forderungen kann man $\omega-\omega_3$ völlig *bestimmen:*

$$[\mathrm{II}'\mathrm{B}]\qquad \omega_1'=[\omega_2\omega_3]+b_1[\omega_1\omega]+b_{12}[\omega_1\omega_2]\,,$$

$$[\mathrm{III}'\mathrm{B}]\qquad \omega_2'=[\omega\omega_3]+\sum_{(i,j)}^{1,2,3}c_{ij}[\omega_i\omega_j]\,.$$

Wenn $M_y-D\beta$ verschwindet, so ist ω totales Differential, da

$$\begin{aligned}a_y-\beta_{y'}&=(M_{y''}-DL)_y-\beta_{y'}=M_{y''y}-DL_y-\beta_{y'}\\&=D\beta_{y''}+\beta_{y'}-DL_y-\beta_{y'}=D(\beta_{y''}-L_y)=0\,.\end{aligned}$$

Satz. *Sei ein Integral* $\int(Ly'''+M)dx$ *gegeben. Wenn* $Ly'''+M$ *nicht von der Form* $F_{y''}y'''+DF$ *ist, so können wir durch die Relationen*

$$[\mathrm{A}]\begin{cases}\omega'=[\omega\omega_2]+a_{12}[\omega_1\omega_2]+a_{13}[\omega_1\omega_3]\,,\\ \omega_1'=[\omega_2\omega_3]+b_1[\omega_1\omega]+\sum_{j=1}^{2}b_{1j}[\omega_1\omega_j]\,,\\ \omega_2'=[\omega\omega_3]+\sum_{(i,j)}^{1,2,3}c_{ij}[\omega_i\omega_j]\,,\\ \omega_3'=\sum_{j=1}^{3}d_j[\omega_j\omega]+\sum_{(i,j)}^{1,2,3}d_{ij}[\omega_i\omega_j]\end{cases}\quad od.\quad [\mathrm{B}]\begin{cases}\omega'=[\omega_1\omega_3]+a_{12}[\omega_1\omega_2]\,,\\ \omega_1'=[\omega_2\omega_3]+b_1[\omega_1\omega]+b_{12}[\omega_1\omega_2]\,,\\ \omega_2'=[\omega\omega_3]+\sum_{(i,j)}^{1,2,3}c_{ij}[\omega_i\omega_j]\,,\\ \omega_3'=\sum_{j=1}^{2}d_j[\omega_j\omega]+\sum_{(i,j)}^{1,2,3}d_{ij}[\omega_i\omega_j]\end{cases}$$

vier Pfaffschen Ausdrücke bestimmen, die gegenüber aller Berührungstransformationen der Ebene invariant sind und deren erste ω *für* $\delta y''=\delta y'=\delta y=0$ *sich in* $(Ly'''+M)dx$ *reduziert; diese Bestimmung ist eindeutig für reelle Funktionen* L, M. *Die Funktionen* $a_{1j}, b_1, b_{1i}, c_{ij},$

d_i, d_{ij} und deren sukzessiven kovarianten Ableitungen bilden das vollständiges System der Invarianten.

Wir können nach E. Cartan die Gleichungen [A] und [B] als die der Struktur des mit je einer allgemeinen Übertragung angehefteten zwei-dimensionalen Raumes andeuten. Und für die holonomen Übertragung, deren fundamentalen Grössen verschwindend oder konstant sind, ist der Raum durch die viergliedrige Gruppe mit der Struktur [A] od. [B] ausgestattet; da $\omega - \omega_3$ sodann in gruppentheoretischen Sinne invariant sind, so lassen sich spezial ω_3 für $\delta y' = \delta y = 0$ und ω für $\delta y'' = \delta y' = \delta y = 0$ bzw. mit dem Bogenelement ds und der mit ihm multiplizierten niedrigsten Differentialinvariante Ids identifiziert. Man erinnere, dass nach G. Kowalewski I stets so gewählt werden kann, dass es die Höchstableitung linear enthält.[1]

(A) Für $Ldy'' + Mdx = y'^{-2}dy'' - \frac{3}{2}y'^{-3}y''^{2}dx$ haben wir

$$(8A)\qquad \begin{cases} \omega = y'^{-2}dy'' - \frac{3}{2}y'^{-3}y''dx - y'^{-3}y''\delta y', & \omega_1 = \delta y, \\ \omega_2 = y'^{-1}\delta y', & \omega_3 = -y'dx; \end{cases}$$

$$(9A)\qquad \omega' = [\omega\omega_2], \quad \omega_1' = [\omega_2\omega_3], \quad \omega_2' = [\omega\omega_3], \quad \omega_3' = [\omega_2\omega_3].$$

Die Gruppe, die $\omega - \omega_3$ invariant lässt, ist, wie man leicht bestätigt,

$$(10A)\qquad p, \quad q, \quad xp, \quad x^2p \quad \left(\text{od. } \bar{x} = \frac{cx+d}{ax+b}, \quad \bar{y} = y+k\right).$$

Das Bogenelement und der niedrigste Differentialinvariante

$$(11A)\qquad ds = y'dx, \quad I = y'^{-3}y''' - \frac{3}{2}y'^{-4}y''^{2}$$

stimmen allerdings mit $-\omega_3$, $-\omega/\omega_3$ überein.

(B) Ganz analog wie in (A) haben wir für $Ldy'' + Mdx = dy'' - ydx$

$$(8B)\qquad \omega = dy'' - ydx, \quad \omega_1 = \delta y, \quad \omega_2 = \delta y', \quad \omega_3 = -dx;$$

$$(9B)\qquad \omega' = [\omega_1\omega_3], \quad \omega_1' = [\omega_2\omega_3], \quad \omega_2' = [\omega\omega_3], \quad \omega_3' = 0;$$

$$(10B)\qquad p, \quad e^{x}q, \quad e^{\varepsilon x}q, \quad e^{\varepsilon^2 x}q \quad (\varepsilon^3 \equiv 1);$$

$$(11B)\qquad ds = dx \ (= -\omega_3), \quad I = y''' - y \ (= -\omega/\omega_3).$$

Für allgemeinen $Ldy'' + Mdx$ ist die Gruppe (10A) oder (10B) die fundamentale Gruppe der Übertragung, und die fundamentalen Invarianten werden als die Strukturgrössen der Übertragung interpretiert.

Dieses Problem wurde an dem Herrn Prof. A. Kawaguchis Seminar diskutiert.

---

1) Vgl. G. Kowalewski, Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen, 1931.