110. Über die Approximation quadratischer Irrationalzahlen durch rationale.

Von Sigekatu KURODA.
Tokyo Higher Normal School for Girls.
(Cmm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Wir bezeichnen mit $M(\vartheta)$ für irrationales ϑ die obere Grenze der positiven Zahlen λ, für welche die diophantische Ungleichung

$$\left|\vartheta-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{\lambda y^2}$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen zulässt. Durch Kettenbruchmethode bestimmte Perron[1] die Zahl $M(\vartheta)$ für quadratische Irrationalzahl ϑ und lieferte einige Beispiele der quadratischen Zahlen, für die die obige Ungleichung mit $\lambda=M(\vartheta)$ endlich bzw. unendlich viele Lösungen zulässt. Im Folgendem wird dieser Satz von Perron kettenbruchsfrei formuliert und bewiesen, sowie der Grenzfall erledigt. Wie zuerst von Herrn Fujiwara[2] bemerkt und von Herren Perron[2] und Shibata[3] untersucht, steht tatsächlich dieser Satz im nahen Zusammenhang mit den Markoffschen Zahlen.

Satz 1. Es sei ϑ eine quadratische Irrationalzahl mit der Diskriminante $D>0$. Die zu ϑ gehörige Gleichung sei

$$a\vartheta^2+b\vartheta+c=0\,, \qquad a>0\,.$$

Es sei ferner k die kleinste positive ganze Zahl, für die mindestens eine der diophantischen Gleichungen

$$ax^2+bxy+cy^2=\pm k \tag{1}$$

Lösungen hat. Dafür dann, dass die diophantische Ungleichung

$$\left|\vartheta-\frac{x}{y}\right|<\frac{k+\varepsilon}{\sqrt{D}y^2} \tag{2}$$

nur endlich viele Lösungen habe, ist notwendig und hinreichend, dass entweder $\varepsilon<0$ ist oder $\varepsilon=0$ und die Gleichung (1) nur für das untere Vorzeichen lösbar ist.

Beweis: Es sei ϑ' die zu $\vartheta=(-b+e\sqrt{D})/2a$, $e=\pm1$, konjugierte Zahl. Alsdann ist

$$\frac{x}{y}-\vartheta'=\left(\frac{x}{y}-\vartheta\right)+(\vartheta-\vartheta')=\left(\frac{x}{y}-\vartheta\right)+e\frac{\sqrt{D}}{a}\,. \tag{3}$$

---

1) O. Perron, Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. SB. Heidelberg. Akad. Wiss. 1921, Abh. 4.

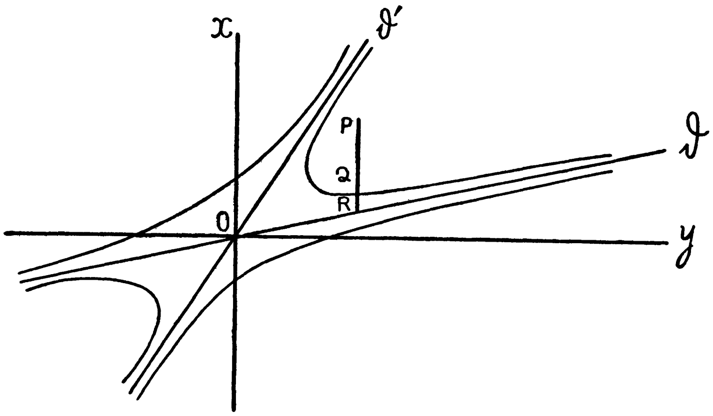
2) O. Perron, Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale, II, S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1921, Abh. 8.

3) K. Shibata, On the approximation of irrational numbers by rational numbers. Jap. J. Math. 1. 1924.

Wir betrachten ausschliesslich solche (sicherlich vorhandene) Lösungen x, y von (1), für die $y>0$ ist und mit wachsendem y x/y beliebig nahe zu ϑ kommt. Für dergleichen x, y mit grossen y und für festes $\varepsilon'>0$ gilt dann wegen (1) und (3)

$$|x-\vartheta y| = \frac{k}{a\left|\frac{x}{y}-\vartheta'\right|y} < \frac{k}{(\sqrt{D}-\varepsilon' a)y}$$

Damit ergibt sich, dass für positives ε die Ungleichung (2) unendlich viele Lösungen hat (Man beachte $a>0$).



Es sei nun $P(y, x)$ ein beliebiger Gitterpunkt mit $y>0$ und R der Schnittpunkt der ϑ-Gerade mit der Senkrechten zur y-Achse durch P. Weil aber wegen der Annahme über k im Innern des von den vier Hyperbelästen (1) begrenzten Bereiches natürlich kein vom Nullpunkte verschiedener Gitterpunkt enthalten ist, so schneidet die Strecke PR mindestens eine Hyperbelaste. Unter diesen Schnittpunkten sei $Q(y, X)$ der nächste zu R. Weil dann

$$PR \geqq QR, \qquad PR = |x-\vartheta y|, \qquad QR = |X-\vartheta y|$$

sind, so folgt aus (1) und (3) für festes $\varepsilon'>0$ und für grosse y

$$|x-\vartheta y| \geqq |X-\vartheta y| = \frac{k}{a\left|\frac{X}{y}-\vartheta'\right|y} \geqq \frac{k}{(\sqrt{D}+\varepsilon' a)y}.$$

Für negatives ε hat sonach die Ungleichung (2) nur endlich viele Lösungen.

Es sei ferner $P(y, x)$ ein Gitterpunkt, die ausserhalb der Hyperbeln (1) liegt. Indem wir die Gleichung $ax^2+bxy+cy^2=\pm(k+1)$ statt (1) gebrauchen, erhalten wir, wie oben, für gewisses kleines $\varepsilon'>0$ und für grosse y

$$|x-\vartheta y| \geqq \frac{k+1}{(\sqrt{D}+\varepsilon' a)y} \geqq \frac{k}{\sqrt{D}y},$$

Für die Ungleichung (2) mit $\varepsilon=0$ ist also die Anzahl derjenigen Lösungen endlich, welche nicht auf die Hyperbeln (1) liegen. Wenn aber der Punkt $P(y, x)$ auf der Hyperbel (1) mit oberem Vorzeichen liegt, so ist wegen $a>0$ entweder

$$x/y>\vartheta>\vartheta' \qquad \text{oder} \qquad x/y<\vartheta<\vartheta'.$$

Dagegen ist für den Punkt $P(y, x)$ auf (1) mit unterem Vorzeichen entweder

$$\vartheta>x/y>\vartheta' \qquad \text{oder} \qquad \vartheta<x/x<\vartheta'.$$

Daher sieht man mit Rücksicht auf (3), dass im ersteren Falle der Punkt $P(y, x)$ der Ungleichung (2) mit $\varepsilon=0$ genügt, aber dass im letzten Falle er es nicht tut. Damit ist der Satz 1. bewiesen.

Satz 2. ϑ, D und k habe die Bedeutung des vorigen Satzes. Dann sind die Teilnennern, die in einer Periode der Kettenbruchentwickelung von ϑ auftreten, nicht grösser als $\left[\frac{\sqrt{D}}{k}\right]$; allerdings kommt unter ihnen die Zahl $\left[\frac{\sqrt{D}}{k}\right]$ oder $\left[\frac{\sqrt{D}}{k}\right]-1$ vor.

Beweis: Die Bezeichnungen des Kettenbruches von ϑ seien

$$\vartheta=k_0+\frac{1}{k_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{k_{n-1}}+\frac{1}{\vartheta_n}, \qquad \frac{p_n}{q_n}=k_0+\frac{1}{k_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{k_{n-1}}$$

Dann ist bekanntlich

$$\left|\vartheta-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(q_n\vartheta_n+q_{n-1})}. \tag{4}$$

Für positives $\varepsilon<1$ und für grosse n gilt also nach Satz 1.

$$\frac{1}{q_n(q_n\vartheta_n+q_{n-1})} \geqq \frac{k-\varepsilon}{\sqrt{D}q_n^2},$$

$$\sqrt{D} \geqq (k-\varepsilon)(\vartheta_n+q_{n-1}/q_n)>(k-\varepsilon)\vartheta_n.$$

Da aber ε beliebig klein sein darf, so gilt für die in der Periode von ϑ auftretenden k_n

$$k_n=[\vartheta_n]<\vartheta_n \leqq \frac{\sqrt{D}}{k}.$$

Andererseits gibt es unter den Lösungen x/y von (2) für positives ε unendlich viele Näherungsbrüche $p_n/q_n=x/y$. Mithin gilt nach (4) für unendlich viele n

$$\frac{1}{q_n(q_n\vartheta_n+q_{n-1})}<\frac{k+\varepsilon}{\sqrt{D}q_n^2},$$

$$\sqrt{D}<(k+\varepsilon)(\vartheta_n+q_{n-1}/q_n)<(k+\varepsilon)(\vartheta_n+1).$$

Daher ist für mindestens ein in der Periode von ϑ auftretendes k_n

$$k_n=[\vartheta_n]>\vartheta_n-1\geqq\frac{\sqrt{D}}{k}-2\,.$$

Damit ist der Satz 2. bewiesen.