108. Verschiebungs- und Abgrenzungssatz in der Theorie der Klassenkörper über einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper.[1]

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut, Hokkaido Kaiserliche Universität zu Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Über einem algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper betrachte ich eine endliche separable abelsche Erweiterung L. Dann existiert in K ein ganzer Divisor $\mathfrak{m}$ und eine mod $\mathfrak{m}$ erklärbare Divisorengruppe H derart, dass L der H zugeordnete Klassenkörper über K wird.[2] Bildet man nun für eine beliebige endliche separable Erweiterung $\bar{K}$ über K das Kompositum $\bar{L}=L\bar{K}$ von $\bar{K}$ und L, so gilt folgender

Satz 1. Verschiebungssatz. *Der abelsche Körper $\bar{L}$ ist ein Klassenkörper zu derjenigen Divisorengruppe $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$, welche aus allen zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren aus $\bar{K}$ besteht, deren Normen (nach K) in H fallen.*

Beweis. Man kann zuerst leicht zeigen, dass $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ mod $\mathfrak{m}$ erklärt ist. Bezeichnet man jetzt mit $\bar{A}^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren in $\bar{K}$, und setzt $[\bar{A}^{(\mathfrak{m})}:\bar{H}^{(\mathfrak{m})}]=h$, $[\bar{L}:\bar{K}]=n$, so braucht man nur zu geigen:

$$h \geqq n,$$

weil die mod $\mathfrak{m}$ $\bar{L}$ zugeordnete Divisorengruppe in $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ enthalten ist.[3]

Nun bezeichne ich mit $\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\bar{\mathfrak{p}}_2$ die Primdivisoren aus $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$, deren Relativgrade nach K resp. gleich 1 und grösser sind als 1. Dann zerfallen alle $\bar{\mathfrak{p}}_1$ in $\bar{L}$ voll. Da nämlich die $\mathfrak{p}_1=N_{\bar{K}K}(\bar{\mathfrak{p}}_1)$ Primdivisoren aus H sind und L der H zugeordnete Klassenkörper ist, so zerfallen die $\mathfrak{p}_1$ nach dem Zerlegungsgesetz in L voll. Aus einem Herbrandschen Lemma[4] schliesst man dann sofort, dass die $\bar{\mathfrak{p}}_1$ in $\bar{L}$ vollzerfallen. Für die $\bar{\mathfrak{p}}_2$ existieren aber in K die Primdivisoren $\mathfrak{p}_2$ derart, dass $N_{\bar{K}K}(\bar{\mathfrak{p}}_2)=\mathfrak{p}_2^f$ mit $f>1$ sind.

---

1) In der mir zugänglichen Literatur sind die beiden Sätze nirgendwo bewiesen. Da ich diese Sätze für meine weitere Untersuchung benutze, so habe ich mich entschlossen, die Beweise hier anzugeben.

2) F. K. Schmidt, Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Konstantenbereich, Sitzungsberichte der phys.- med. Sozietät zu Erlangen, Bd. 62 (1930), S. 267-284. Diese Arbeit bezeichne ich mit Schd. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 172 (1934), S. 46.

3) Schd., S. 276.

4) Herbrand, Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, Journ. de Liouville, Tome 10 (1932), S. 490. Dieses für die Primideale bewiesene Lemma gilt auch für die Primdivisoren.

Für eine reelle Veränderliche $s>1$ gilt also

$$\sum_{\bar{\mathfrak{p}}_2} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_2)^s} \leqq [\bar{K}:K] \sum_{\mathfrak{p}_2} \frac{1}{N(\mathfrak{p}_2)^{2s}} \leqq [\bar{K}:K] \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^{2s}},$$

wo $\mathfrak{a}$ alle zu $\mathfrak{m}$ primen ganzen Divisoren aus K durchläuft. Aus dem Riemann-Rochschen Satz schliesst man dabei, dass $\lim\limits_{s\to 1} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^{2s}}$ vorhanden und endlich ist.[1]

Sind nun die $\bar{\mathfrak{p}}$ Primdivisoren aus $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$, so besteht

$$\sum_{\bar{\mathfrak{p}}} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}})^s} = \sum_{\bar{\mathfrak{p}}_2} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_1)^s} + \sum_{\bar{\mathfrak{p}}_2} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_2)^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f_0(s),$$

wobei $\lim\limits_{s\to 1} f_0(s)$ endlich ist.[2] Hieraus folgt

$$\sum_{\bar{\mathfrak{p}}_1} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_1)^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f(s)$$

mit $f(s) = f_0(s) - \sum\limits_{\bar{\mathfrak{p}}_2} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_2)^s}$. Offenbar ist $\lim\limits_{s\to 1} f(s)$ vorhanden und endlich.

Für die zu $\mathfrak{m}$ primen Primdivisoren $\bar{\mathfrak{p}}_*$ aus $\bar{K}$, welche in $\bar{L}$ vollzerfallen, gilt aber wie in der Zahlentheorie

$$\sum_{\bar{\mathfrak{p}}_*} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_*)^s} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{s-1} + g(s),$$

wobei $g(s)$ für $s \to 1$ endlich ist.[3] Da aber nach dem oben Bemerkten $\sum \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_1)^s} \leqq \sum \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_*)^s}$ ist, so gilt offenbar

$$0 \leqq \sum_{\bar{\mathfrak{p}}_*} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_*)^s} - \sum_{\bar{\mathfrak{p}}_1} \frac{1}{N(\bar{\mathfrak{p}}_1)^s} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{h}\right) \log \frac{1}{s-1} + F(s),$$

wo $\lim\limits_{s\to 1} F(s)$ endlich ist. Man schliesst also geläufiger Weise

$$h \geqq n, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aus Satz 1 folgt sofort

Satz 2. Abgrenzungssatz. *Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über K. Dann ist die $\bar{K}$ zugeordnete Divisorengruppe identisch mit der dem maximalen abelschen Teilkörper von $\bar{K}/K$ zugeordneten Divisorengruppe in K.*

Zum Schluss will ich einen Satz beweisen, welcher eine gewisse Ergänzung des Anordnungssatzes ist. Der Satz lautet folgendermassen:

Satz 3. *Es seien $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ beide Klassenkörper über K, und H_1, H_2 resp. die $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ zugeordneten Divisorengruppen in K. Dann gilt:*

1.) Das Kompositum $\bar{K}_1\bar{K}_2$ von $\bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$ ist der $H_1 \cap H_2$ zugeordnete Klassenkörper über K.

---

1) Schd., S. 273–274.

2), 3) Schd., S. 275.

2.) Der Durchschnitt $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2$ von $\bar{K}_1$ mit $\bar{K}_2$ ist der H_1H_2 zugeordnete Klassenkörper über K.

Beweis von 1.) Da $\bar{K}=\bar{K}_1\bar{K}_2$ über K separabel abelsch ist, so gibt es in K eine Divisorengruppe H von der Art, dass $\bar{K}$ der H zugeordnete Klassenkörper wird. Für einen gemeinsamen Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H, H_1, H_2 gibt es in K die mod $\mathfrak{m}$ erklärten Divisorengruppen $H^{(\mathfrak{m})}=H$, $H_1^{(\mathfrak{m})}=H_1$, $H_2^{(\mathfrak{m})}=H_2$. Es genügt also nur zu zeigen:

$$H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}=H^{(\mathfrak{m})}.$$

Da $\bar{K}_1, \bar{K}_2$ beide in $\bar{K}$ enthalten sind, so gilt zunächst

$$H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})} \geqq H^{(\mathfrak{m})}.$$ [1]

Ist nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primdivisor aus $H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}$, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $\bar{K}_1$ voll. Ferner gehört ein beliebiger Primdivisorteiler $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ in $\bar{K}_1$ nach Satz 1 der mod $\mathfrak{m}$ $\bar{K}$ zugeordneten Divisorengruppe $\bar{H}^{(\mathfrak{m})}$ aus $\bar{K}_1$ an, weil $N_{\bar{K}_1K}(\bar{\mathfrak{p}})=\mathfrak{p}\in H$ ist. Also zerfällt $\bar{\mathfrak{p}}$ nach dem Zerlegungsgesetz in $\bar{K}$ voll. Da schliesslich $\mathfrak{p}$ in $\bar{K}$ vollzerfallen muss, so ist $\mathfrak{p}$ in $H^{(\mathfrak{m})}$ enthalten. Damit ist gezeigt, dass alle Primdivisoren aus $H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}$ zu $H^{(\mathfrak{m})}$ gehören, und umgekehrt. Es gilt daher

$$\sum_{\mathfrak{p}\in H^{(\mathfrak{m})}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}=\frac{1}{[A^{(\mathfrak{m})}:H^{(\mathfrak{m})}]}\log\frac{1}{s-1}+f_1(s)$$

$$=\frac{1}{A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}}\log\frac{1}{s-1}+f_2(s).$$

Dabei bezeichnet $A^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren aus K und $f_1(s)$, $f_2(s)$ sind endlich für $s\to 1$. Hieraus folgt ohne weiteres $[A^{(\mathfrak{m})}:H^{(\mathfrak{m})}]=[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}]$, ist also

$$H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}=H^{(\mathfrak{m})}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis von 2.). Nach 1.) gilt offenbar

$$[\bar{K}:K]=[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}].$$

Daraus schliesst man leicht

$$[\bar{K}:K]=\frac{[\bar{K}_1:K]\,[\bar{K}_2:K]}{[\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2:K]}$$

und
$$[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})} \cap H_2^{(\mathfrak{m})}]=\frac{[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})}]\,[A^{(\mathfrak{m})}:H_2^{(\mathfrak{m})}]}{[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})}H_2^{(\mathfrak{m})}]}.$$

Aus $[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})}]=[\bar{K}_1:K]$ und $[A^{(\mathfrak{m})}:H_2^{(\mathfrak{m})}]=[\bar{K}_2:K]$ folgt also

$$[A^{(\mathfrak{m})}:H_1^{(\mathfrak{m})}H_2^{(\mathfrak{m})}]=[\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2:K].$$

---

1) Schd., S. 276.

Für die mod $\mathfrak{m}$ dem Körper $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2$ zugeordnete Divisorengruppe $H_0^{(\mathfrak{m})}$ gelten offenbar

$$H_0^{(\mathfrak{m})} \geqq H_1^{(\mathfrak{m})} H_2^{(\mathfrak{m})} \quad \text{und} \quad [A^{(\mathfrak{m})} : H_0^{(\mathfrak{m})}] = [\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 : K] .$$

Es folgt also

$$H_0^{(\mathfrak{m})} = H_1^{(\mathfrak{m})} H_2^{(\mathfrak{m})} , \qquad \text{w. z. b. w.}$$