106. *Sur les majorantes des fonctions CA.*

Par Motokiti KONDÔ.

L'Institut Mathematique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Grâce à l'axiome du choix de M. E. Zermelo, M. N. Lusin[1] a démontré qu'il existe une fonction mesurable (L) qui est définie sur tous les nombres réels et qui ne peut être majorée par aucune fonction représentable analytiquement. Or, en appliquant la théorie des ensembles CA, on peut nommer tels fonctions, c.-à.-d.,

Théorème 1. Il existe une fonction CA[2] mesurable (L) (d'une variable réelle) qui ne peut être majorée par aucune fonction mesurable (B).

Démonstration. Prenons dans un espace $R(x, y, z)$, un ensemble analytique universel pour les ensembles analytiques plans, c.-à-d., un ensemble analytique M, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan $y=0$ on obtient tous les ensembles analytiques possibles. On sait alors[3] qu'il existe dans l'axe OY un ensemble complémentaire analytique Q ayant les propriétés suivantes: 1°, l'ensemble $U^*=M(OX \times Q \times OZ)$ est de la classe CA, 2°, quel que soit le point y_o de l'ensemble, Q, l'ensemble $M^{(y_o)}$ est l'image géométrique d'une fonction de Baire (d'une variable réelle), 3°, pour toute fonction de Baire (d'une variable réelle) $Z=\varphi(x)$, il existe un nombre réel y_o, tel que l'ensemble $M^{(y_o)}$ est précisément l'image géométrique de $Z=\varphi(x)$. Comme le complémentaire H de l'ensemble Q par rapport à l'axe OY est un ensemble analytique, il existe, d'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz, un ensemble élémentaire E dans le plan $R(y, z)$ dont la projection de ses points inférieurs sur l'axe OY est précisément H. Désignons par L l'ensemble de tous les points inférieurs de l'ensemble E. l'ensemble $U^{**}=L \times OX$ est alors un ensemble CA dans R.

La fonction CA $U(x, y)$ dont l'image géométrique est l'ensemble CA $U=U^*+U^{**}$ est universel pour toutes les fonctions de Baire (d'une variable réelle). Maintenant, nous démontrons que la fonction $U(x, x)$ satisfait aux conditions du théorème 1. Pour un nombre réel Z_o, considérons l'ensemble $F=\text{Ens}\,(U(x, y)>Z_o)$. Comme nous avons

$$F=Q\,\text{Proj}\,\{M(Z>Z_o)\}+\text{Proj}\,\{E(Z>Z_o)-\text{Proj}\,\{E(Z\leqq Z_o)\}^{4)},$$

l'ensemble F est de la classe $A\rho\sigma$.[5] Par conséquent, la fonction CA

---

1) W. Sierpiński: L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. Bulletin d. l'acad. d. Sc. d. Cracovie, Ser. A, (1918), 143.

2) Nous entendrons par la fonction CA d'une variable réelle celui qui donne l'ensemble CA comme l'image géométrique.

3) K. Kunugui: Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points est un complémentaire analytique, Proc. of the Imp. Acad. **12** (1936), 273-276.

4) Désignons par $M(Z<Z_0)$ l'ensemble de tous les points qui les coordonnées $Z>Z_0$.

5) Désignons par $A\rho\sigma$ la famille des ensembles qui peuvent être définis comme la somme d'une infinité dénombrable des ensembles $A\rho$.

$U(x, x)$ est de la classe $A\rho\sigma$. Or, comme l'ensemble analytique est mesurable (L), la fonction $U(x, x)$ est aussi mesurable (L).

D'ailleurs, la fonction $U(x, x)$ n'est majorée par aucune fonction mesurable (B). En effet, supposons, par impossible, qu'il existe une fonction de Baire $\varphi(x)$, telle qu'on ait $U(x, x) \leqq \varphi(x)$ pour tous les nombres réels. Or, comme la fonction $\varphi(x)+1$ est mesurable (B), il existe un nombre réel y_o, tel qu'on ait $U(x, y_o) \equiv \varphi(x)+1$, ce qui donne $U(y_o, y_o) = \varphi(y_o)+1$ ou $\varphi(y_o) < U(y_o, y_o)$. C'est contradictoire avec la supposition sur la fonction $\varphi(x)$.

Dans sa note,[1] M. N. Lusin a donné diverses définitions sur la séparabilité (B) des courbes et quelque exemples qui s'y rattachent. Or, pour la courbe $C: Z = U(x, x)$ tracée dans le plan $R(x, z)$, il n'existe aucune courbe mesurable (B) située au-dessous et au-dessus de la courbe C. Donc, en modifiant la courbe C, on peut donner dans le plan deux courbes jouissant des propriétés suivantes: 1°, l'une est mesurable (B) et l'autre est le complémentaire analytique, 2°, l'une est au-dessus de l'autre 3°, les deux courbes ne sont pas séparables (B) au moyen d'une courbe.

De plus, M. K. Kunugui[2] a donné deux courbes complémentaires analytiques, une est au-dessus de l'autre, qui ne sont pas séparables (B) au moyen d'un ensemble. Or, on peut démontrer le

Théorème 2. Il existe une courbe CA, c.-à-d., une courbe CA Γ du plan $R(x, z)$ qui est l'image géometrique d'une fonction CA définie sur tous les nombres réels, jouissant de la propriété: il n'existe ancun ensemble analytique du plan $R(x, z)$ qui est situé au-dessus de la courbe Γ et qui est sûrement coupé par chaque droite parallèle à l'axe OZ au moins en un point.

Démonstration. Considérons dans l'espace $R(x, y, z)$ un ensemble analytique U universel pour les ensembles analytiques plans, c.-à-d., un ensemble analytique U tel qu'en coupant avec les plans parallèles au plan $y=0$ on obtient tous les ensembles analytiques possibles. Projetons sur le plan $y=0$ tous les points de l'ensemble U contenus dans le plan $x=y$ et désignons par U^* cet ensemble. Il est évident que l'ensemble U^* est analytique dans le plan $R(x, z)$.

Désignons par V l'ensemble de tous les points (x_o, z_o) tels qu'il existe dans l'ensemble U^* un point (x_0, z_1) qui $z_0 > z_1$. On voit sans peine que l'ensemble V est analytique. Désignons par Q_n la projection, sur l'axe OX, de l'ensemble de tous les points de l'ensemble V tels que les coordonnées Z sont supérieurs à n. Alors, les ensembles $Q_n (n=1, 2, \ldots)$

---

1) N. Lusin: Quelques remarques sur les courbes qui sont des complémentaires analytiques. Mathematica, **10** (1935), 70–80.

2) Prenons dans le domaine $(y < -1)$ du plan $R(x, y)$ un ensemble CA N uniforme par rapport à l'axe OY, dont la projection orthogonale sur l'axe OX est sûrement l'ensemble analytique E non mesurable (B). Et, définirons deux fonctions $\varphi_k(x)\,(k=1, 2)$ comme il suit: si le point x_o appartient à l'ensemble E, $\varphi_1(x_o)=y_o$ pour le coordonnée y_o du point de l'ensemble N situé sur la droite $x=x_o$ et sinon, $\varphi_1(x)=0$ et enfin, posons $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)+\frac{1}{4}$ pour tous les points x de l'axe OX. Alors, on peut voir que les deux courbes définies par les deux fonctions satisfont aux conditions demandées. (全國紙上數學談話會 111 號).

sont analytiques et la somme $Q=\sum Q_n$ est la projection de l'ensemble U^* sur l'axe OX. Comme les ensembles $Q_n-Q_{n-1}(n=1, 2, \dots)$, où nous posons $Q_o=0$, sont de la classe A_ρ, il existe, d'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz, des complémentaires analytiques uniformes L_n dans le plan $R(x, z)$, dont les projection orthogonale zur l'axe OX sont respectivement Q_n. Ici, on peut supposer que les coordonnées z de tous les points de l'ensemble L sont supérieurs à n. Alors, la somme de l'ensemble L_n, $L=\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ est un ensemble CA uniforme contenu dans l'ensemble U^* et la projection orthogonale sur l'axe OX est l'ensemble Q.

En désignant par $\varphi(x_o)$ pour un point x_o de l'ensemble Q le coordonnée Z du point de l'ensemble L situé sur le droite $x=x_o$, nous définirons la fonction $F(x)$ comme il suit: si le point x appartient à l'ensemble Q, posons $F(x)=\varphi(x)$, et sinon, posons $F(x)=0$. Alors, la fonction $F(x)$ est la fonction CA définie peur tous les nombres réels. Maintenant, nous démontrons que la fonction $F(x)$ satisfait aux conditions du théorème 2. Pour cela, supposons, par impossible, qu'il existe dans le plan $R(x, z)$ un ensemble analytique N qui est situé au-dessus de la courbe $Z=F(x)$ et qui est sûrement coupé par chaque droite parallèle à l'axe OZ au moins en un point. Selon l'université de l'ensemble U, il existe un nombre réel y_o, tel qu'on ait $U^{(y_o)}=N$. Donc, la droite $x=y_o$ rencontre l'ensemble U^* au plus en un point, d'où, le point y_o appartient à l'ensemble Q. De plus, la droite $x=y_o$ coupe les deux ensembles N et U^* en le même ensemble de points. Par conséquent, il existe dans l'ensemble $N(x=y_o)$ au moins un point qui est situé au-dessous du point $\varphi(y_o)$, ce qui donne une contradiction.

C. Q. F. D.