PAPERS COMMUNICATED

26. *Einführung einer Metrik auf die Riemannsche Fläche und der Typus der Riemannschen Fläche.*

Von Shizuo KAKUTANI.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., April 12, 1937.)

1. Es sei F eine einfach zusammenhängende unendlich vielblättige offene Riemannsche Fläche. Nach dem bekannten Satz der Funktionentheorie kann F eineindeutig und, bis auf eventuelle innere Windungspunkte endlicher Ordnung, konform abgebildet werden entweder auf den Einheitskreis (hyperbolischer Fall) oder auf die punktierte Ebene (parabolischer Fall). Für das Eintreten des parabolischen Falles sind viele hinreichende Bedingungen von mehreren Autoren[1] gegeben. Die Methode, mit deren Hilfe diese Bedingungen erhalten werden, ist aber dieselbe und die Idee davon, welche auf dem Begriffe der Metrik beruht, ist von L. Ahlfors explizit gegeben. Die Metrik von Ahlfors ist aber so allgemein, dass es nicht nützlos scheint, einige spezielle Metrik eingehend zu untersuchen.

In der vorliegenden Note werde ich auf F eine Metrik einführen, derart, dass es auf F zwischen zwei Punkten eine und nur eine geodätische Linie gibt.

2. Der Einfachheit halber beschränke ich mich zunächst auf den Fall, wo es keine Windungspunkte auf F gibt. Es sei $f(w)$ eine auf F definierte reelle positive bis auf isolierte Punkte stetige Funktion, über die ich im Folgenden einige Ansprüche machen werde. Dann ist für jedes Paar w_1, w_2 von Punkten auf F die Entfernung $d(w_1, w_2)$ zwischen ihnen folgendermassen definiert:

$$d(w_1, w_2) = \text{U. G.} \int_K f(w) \, | \, dw \, | \,, \tag{1}$$

wo U. G. die untere Grenze für die sämtlichen w_1 und w_2 verbindenden rektifizierbaren Kurven K bedeutet.

Es sei ferner $f(w)$ so beschaffen, dass für jede den inneren Punkt w_0 mit dem Randpunkte w_1 verbindende (d. h. in F nicht endende) Kurve K die Relation

$$\lim_{w \to w_1} \int_{w_0 \, K}^{w} f(w) \, | \, dw \, | = \infty$$

besteht. Dafür dass die untere Grenze (1) für eine und nur eine Kurve K erreicht wird, ist es hinreichend, dass $\log f(w)$ subharmonisch ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man z. B.

---

1) Vgl. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen (Springer, Berlin, 1936), Kapitel XII, § 3.

2) L. Ahlfors, Sur le type d'une surface de Riemann, Comptes Rendus, **201** (1935).

$$f(w) = \text{Max}\left(1, \frac{1}{\delta(w)}\right) \tag{2}$$

setzt, wo $\delta(w)$ die Entfernung (im euklidischen Sinne) zwischen w und dem Rande $B(F)$ bedeutet.

Man hat dabei zu bemerken, dass bis jetzt die Fläche F als auf der Gaussischen Ebene ausgebreitet gedacht war, und dass aber, im Falle eines auf der Riemannschen Kugel Σ ausgebreiteten Fläche F, in der Formel (1) an Stelle von $|dw|$, $\dfrac{|dw|}{1+|w|^2}$ kommen muss und folglich anstatt des Subharmonischseins von $\log f(w)$ das von $\log \dfrac{f(w)}{1+|w|^2}$ verlangt wird.

In diesem Falle kann $f(w)$ folgendermassen definiert werden:

$$f(w) = \left(\frac{1}{\delta_1(w)}\right)^2,$$

wo unter $\delta_1(w)$ die Sehnenentfernung zwischen w und $B(F)$ zu verstehen ist. Dass diese Funktion $f(w)$ das Gewünschte leistet, ist leicht aus der Formel der Sehnenentfernung

$$[w_1, w_2] = \frac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{1+|w_1|^2}\sqrt{1+|w_2|^2}}$$

einzusehen.[1)]

Wenn man F in dieser Weise metrisiert, so kann man auf F eine Geometrie konstruieren. In dieser Geometrie ist die Länge jeder im euklidischen Sinne rektifizierbaren Kurve K als

$$\int_K f(w)\,|dw|$$

definiert und es gibt zwischen zwei Punkten w_1, w_2 eine und nur eine geodätische Linie $g(w_1, w_2)$.

Jetzt nehme man einen beliebigen Punkt w_0 als Anfangspunkt und betrachte den geodätischen Kreis $C(\rho)$ mit dem Mittelpunkt w_0 und dem Radius ρ (d. h. $C(\rho)$ ist die Menge aller Punkte w für die $d(w, w_0) = \rho$). Die Länge von $C(\rho)$ sei $L(\rho)$. Es ist leicht einzusehen, dass $L(\rho) \geqq 2\pi\rho$ ist. In Bezug auf dieses $L(\rho)$ besteht der Ahlforssche

Satz. Wenn $\displaystyle\int^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)}$ divergiert, so ist F vom parabolischen Typus.

3. Um nur die hinreichende Bedingung für den parabolischen Fall zu erhalten, ist es nicht notwendig die Eindeutigkeit der geodätischen Linie zu verlangen, so dass die Voraussetzung, dass $\log f(w)$ oder $\log \dfrac{f(w)}{1+|w|^2}$ subharmonisch ist, vernachlässigt werden kann. Man kann aber in unserem Fall auf F eine „normale Koordinate" einführen. Es sei nämlich $\rho = d(w, w_0)$ und θ die Winkel, welche die geodätische Linie $g(w, w_0)$ mit der reellen Achse an dem Punkt w_0 macht. (ρ, θ) ist die

---

1) Vgl. O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions (Thèse, Lund, 1935), pp. 63–64.

gewünschte Koordinate. Wenn man w zu dem Punkte $z=\rho' e^{i\theta}$ ($\rho'=\rho$ für $\rho \leqq 1$, $\rho'=1+\int_1^\rho \frac{d\rho}{L(\rho)}$ für $\rho > 1$) der z-Ebene entsprechen lässt, so ist in dieser Weise eine eineindeutige und stetige Abbildung von F auf die ganze punktierte Ebene konstruiert. Wäre es möglich zu bestätigen, dass diese Abbildung $w \to z$ von beschränkter Verzerrung[1] sei, so würde hiermit mit der Divergenz von $\int^\infty \frac{d\rho}{L(\rho)}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten des parabolischen Falles erhalten. Es ist aber eine schwierige Aufgabe zu untersuchen, unter welcher Bedingung diese Abbildung $w \to z$ von beschränkter Verzerrung sein werde.

4. Der Fall, wo es auch algebraische Windungspunkte auf F gibt, ist schwieriger zu behandeln. Wenn die Menge aller algebraischen Windungspunkte eine positive Entfernung 2δ von dem Rand $B(F)$ von F hat — dies ist sicher der Fall, wenn es von den algebraischen Windungspunkte nur endlich viele gibt —, so kann $f(w)$ folgendermassen definiert werden:

Man schlage um jeden algebraischen Windungspunkt a einen kleinen Kreis C_a mit dem Radius $\delta_a (\delta_a < \delta)$, derart, dass je zwei von ihnen keinen Punkt gemein haben. Dann setze man

$$f(w)=\frac{\delta}{\delta(w)} \qquad \text{für } \delta(w) < \delta \tag{3}$$

$$f(w)=\left(\frac{\delta_a}{|w-a|}\right)^{\frac{n}{n+1}} \qquad \text{für } w \in C_a{}^{2)} \tag{4}$$

$$f(w)=1 \qquad \text{für alle andere } w\,, \tag{5}$$

wo $\delta(w)$ wie immer die Entfernung zwischen w und dem Rande $B(F)$ und n die Ordnung von dem algebraischen Windungspunkte a bedeutet. Wenn es sogar auf F keine Singularitäten ausser algebraischen gibt, so kann $f(w)$ nur durch (4) und (5) definiert werden. Dass die derart definierte Funktion $f(w)$ die gewünschte Eigenschaft besitzt, ist leicht zu beweisen.

Wenn wir uns auf die Bedingung der Eindeutigkeit der geodätischen Linie verzichten (was, wie wir wissen, nichts schadet um die hinreichende Bedingung für den parabolischen Fall zu erhalten), so ist $f(w)$ leicht in mehreren Weisen zu definieren; man setze z. B.

$$f(w)=\frac{1}{\delta_2(w)}\,,^{3)}$$

---

1) Vgl. hierzu meine in kurzem zu erscheinende Arbeit: Applications of the theory of pseudo-regular functions to the type-problem of Riemann surfaces, Japanese Journal of Mathematics, **13** (1936).

2) Man kann auch $f(w)=1$, für $w \in C_a$, setzen.

3) Dieser Fall entspricht der Kobayashischen Methode. Vgl. Z. Kobayashi, Theorems on the conformal representation of Riemann surfaces, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, sect. A, Nr. 39 (1935).

wo $\delta_2(w)$ die Entfernung zwischen w und $B(F)+W$ (W ist die Menge aller algebraischen Windungspunkte) bedeutet, oder, wenn es keine Singularitäten ausser algebraischen gibt, $f(w)\equiv 1$.[1]

1) Dieser Fall entspricht der Ahlforsschen Methode. Vgl. L. Ahlfors, Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche, Comm. Math. Helv., **3** (1931). Diese Methode kann auch auf den Fall einer auf der Kugel ausgebreiteten Riemannschen Fläche angewandt werden. Siehe hierzu eine kürzlich erschienene Arbeit von L. Ahlfors: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen, Soc. Scient. Fennica, Comm. Physico-Math. **9** (1936).

Das Resultat dieser Ahlforsschen Arbeit und das der unter 2) von Seite 89 zitierten Arbeit hatte ich schon vor zwei Jahren erhalten, habe es aber nicht veröffentlicht.