67. *Sur un théorème de M. Beurling.*

Par Seiiti IRIE.

L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., July 12, 1937.)

1. M. Beurling a établi dans sa Thèse[1] le théorème suivant: *Supposons qu'une fonction $U(z)$ soit harmonique et uniforme dans un domaine D et qu'elle soit bornée supérieurement au voisinage d'un point frontière z_0 de D; soit z_0 régulier pour le problème de Dirichlet. Si $U(z)$ satisfait à l'inégalité: $\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{z\to z'}}\ U(z) \leqq m$, z' étant un point frontière de D, m un nombre réel fini, on a $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\ U(z) \leqq m$.*

Le but de cette Note est d'en donner une démonstration élémentaire en remplaçant l'hypothèse que le point z_0 soit régulier pour le problème de Dirichlet par les suivantes: *Supposons qu'il existe un continu frontière de D qui contienne le point z_0 et que z_0 soit accessible par l'intérieur*, c'est-à-dire qu'il existe un arc simple de Jordan l dont une extrémité est z_0 et dont tous les autres points appartiennent à D.

2. Désignons par $z=z(t)$ l'équation de l'arc l, $z(t)$ étant une fonction d'un paramètre réel t définie et continue dans un intervalle fermé $[0, 1]$.

Considérons d'abord la fonction $\zeta=\sqrt{\dfrac{z-z_0}{z-z_1}}$, $z_1(\neq z_0)$ étant un point de l. Chacune des deux branches de cette fonction $\zeta=\varphi_1(z)$ ou $\zeta=\varphi_2(z)$ est uniforme dans D et transforme biunivoquement D en un domaine soit D_1 ou D_2. Ces deux domaines D_1 et D_2 sont extérieurs l'un à l'autre et leur frontières contiennent le point $\zeta=0$ comme le transformé de z_0. Le domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$ dont la frontière est l'arc simple de Jordan l_2: $\zeta=\zeta(t)=\varphi_2\big(z(t)\big)$ contient le domaine D_1. Soit $w=\psi(\zeta)$ une fonction holomorphe qui transforme biunivoquement $\mathfrak{D}$ au cercle $|w|<1$ tel que $\zeta=0$ corresponde au point $w=1$. La fonction holomorphe $w=\psi\big(\varphi_1(z)\big)$ transformera biunivoquement D en un domaine $\varDelta$ intérieur au cercle $|w|<1$ et le point z_0 au point $w=1$, la transformation étant bicontinue sur la frontière au voisinage de z_0.

On voit ainsi qu'il suffit de considérer le cas où D est un domaine $\varDelta$ qui est contenu dans le cercle $|z|<1$ et dont la frontière contient le point $z=1$.

En considérant désormais un tel domaine $\varDelta$, démontrons la proposition suivante: *Supposons qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un cercle de centre $z=1$ tel qu'en tout point de $\varDelta$ intérieur à ce cercle on ait: $u(z)<\dfrac{\varepsilon}{|1-z|}$. (Si $u(z)$ est borné supérieurement*

---

1) A. Beurling: Étude sur un problème de majoration (Upsal, 1933), p. 69.

au voisinage du point $z=1$ cette hypothèse est satisfaite sans doute.) Si l'on a $\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{z\to z'}}\, u(z) \leqq m$, *$z'$ étant un point frontière de Δ, m un nombre réel fini, on peut alors affirmer qu'à tout point de Δ* $u(z) \leqq m$.

3. Dans la suite on se servira du théorème de Phragmén-Lindelöf: *Soit Δ un domaine mentionné dans le numéro précédent. Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit régulière et que son module soit uniforme dans le domaine Δ. Si l'on a $\overline{\lim\limits_{z\to z'}}\, |f(z)| \leqq m$ pour tout point frontière z' de Δ sauf le point $z=1$, m étant un nombre réel fini, et si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un cercle de centre $z=1$ tel qu'en tout point de Δ intérieur à ce cercle on ait: $|f(z)| < e^{\frac{\varepsilon}{|1-z|}}$, on peut alors affirmer qu'en tout point de Δ $|f(z)| \leqq m$.*

Traduit en langage de fonctions harmoniques, ce théorème s'énoncera comme il suit: *Soit une fonction $u(z)$ harmonique et uniforme dans le domaine Δ. Si l'on a $\overline{\lim\limits_{z\to z'}}\, u(z) \leqq \mu$, pour chaque point frontière z' de Δ sauf le point $z=1$, μ étant un nombre réel fini, et si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un cercle de centre $z=1$ tel qu'en tout point de Δ intérieur à ce cercle on ait: $u(z) < \frac{\varepsilon}{|1-z|}$, on peut alors affirmer qu'à tout point de Δ $u(z) \leqq \mu$.*

Considérons, en effet, la fonction $f(z)=e^{u(z)+iv(z)}$, où $v(z)$ est une fonction conjuguée de $u(z)$. Comme $f(z)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Phragmén-Lindelöf, on a $|f(z)|=e^{u(z)} \leqq e^{\mu}$, d'où $u(z) \leqq \mu$.

Remarque. Ce théorème est vrai même si Δ est un ensemble ouvert non connexe.

4. Il existe une famille des fonctions $\chi_\lambda(z)$, $0 \leqq \lambda < 1$, dans Δ qui jouissent des propriétés suivantes: 1° $\chi_\lambda(z)$ est harmonique dans Δ et continu sur la frontière de Δ. 2° $\chi_\lambda(z) \leqq 0$. 3° $\chi_\lambda(1)=0$. 4° A tout point de Δ qui est sur le cercle $|z-1|=\rho$, ρ étant un nombre positif non nul, on a uniformément $\lim\limits_{\lambda\to 1} \chi_\lambda(z) = -\infty$.

Il suffit de considérer, par exemple, les fonctions

$$\chi_\lambda(z)=\log\left|\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}+1\right|-\log 2.$$

5. *Démonstration de l'énoncé du n° 2.* A tout nombre positif η, on peut faire correspondre un nombre positif r tel qu'on ait $u(z) < \frac{\varepsilon}{|1-z|}$ et $\overline{\lim\limits_{z\to z'}}\, u(z) \leqq m+\eta$, z et z' étant respectivement un point intérieur et un point frontière de Δ qui sont intérieurs au cercle fermé $|z-1| \leqq r$. Désignons par Δ' la partie commune de Δ et du cercle $|z-1| < r$, par C' l'ensemble des points frontière de Δ' qui sont contenus dans l'intérieur de Δ. D'après la condition 4° du numéro précédent on a $\chi_\lambda(z) < m+\eta-M$ sur C', M étant la borne supérieure de $u(z)$ sur C' et λ_0 une valeur de λ choisie convenablement. Donc la fonction $v(z)=u(z)+\chi_{\lambda_0}(z)$ satisfait aux inégalités $v(z) < u(z)$ dans Δ' et $\overline{\lim\limits_{z\to z'}}\, v(z) \leqq m+\eta$ en tout point z' de la frontière de Δ' sauf le point $z=1$. D'après le

théorème de Phragmén-Lindelöf $v(z) \leqq m+\eta$ dans $\varDelta'$. Par conséquent $\overline{\lim\limits_{z\to 1}}\, v(z) = \overline{\lim\limits_{z\to 1}}\, u(z) \leqq m+\eta$. η étant arbitraire on a $\overline{\lim\limits_{z\to 1}}\, u(z) \leqq m$. C. Q. F. D.

6. Corollaire. *Soient D un domaine dont la frontière contient un continu C et z_0 un point de C accessible par l'intérieur. Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit régulière et du module uniforme dans D et qu'elle soit bornée supérieurement au voisinage de z_0. Si $f(z)$ satisfait à l'inégalité : $\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\, \overline{\lim\limits_{z\to z'}}\, |f(z)| \leqq m$, z' étant un point frontière de D, m un nombre positif fini, on a $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\, |f(z)| \leqq m$.*