106. *Theorie der topologischen Verbände: Ein Versuch zur Formalisierung der allgemeinen Topologie und der Theorie der reellen Funktionen.*

Von Hidetaka TERASAKA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1937.)

Die Untersuchungen der allgemeinen Topologie mit der algebraischen Methode, die eine Fusion der Kuratowskischen Methode[1] der abgeschlossenen Hülle und der Verbändenmethode von Fr. Klein, G. Birkhoff, O. Ore, K. Menger, J. von Neumann u. a.[2] ist, die deshalb mit der Theorie der topologischen Verbände bezeichnet werden dürfte, führte mich zunächst zur Aufdeckung enger formaler Analogie zwischen den regulären Mengen, die M. H. Stone[3] in seiner grundlegenden Arbeit behandelt hat, und den Mengen von Bairescher Eigenschaft. Für die Menge[4] X entsprechen sich nämlich X^{acaca} und X^{pcpcp}, die bei Kuratowski mit $X^{-\prime-\prime-}$ bzw. $D(X)$ (bis auf U_I[5]) identisch sind, so dass durch $(X^aX^c)^{acaca}=0$ und $(X^pX^c)^{pcpcp}=0$ (mod U_I) reguläre Menge bzw. Menge von Bairescher Eigenschaft charakterisiert werden.[6] Durch einen Erweiterungssatz oder einfacher direkt lässt sich ferner zeigen, dass das System aller reellen Funktionen Teilmenge eines topologischen Verbandes ist, so dass viele, insbesondere Unstetigkeitsstellen betreffende Sätze bloss als wörtliche Übersetzungen allgemeiner Formeln des Verbandes betrachtet werden können. In dieser Note möchte ich meine Untersuchungen in den Hauptzügen auseinandersetzen in der Hoffnung, die ganze Darstellung an anderer Stelle veröffentlichen zu können.

§ 1. Es seien $X, Y, \ldots\ldots$ Elemente eines gegebenen Systems $\mathfrak{X}$ von der Beschaffenheit, dass für jedes Paar von Elementen $X, Y \in \mathfrak{X}$ eindeutigerweise Elemente $X+Y$ (Summe) und XY (Produkt) erklärt sind, und dass für jedes $X \in \mathfrak{X}$ Elemente X^c (Komplement von X) und X^a (abgeschlossene Hülle oder kürzer Abschliessung von X) in $\mathfrak{X}$ eindeutigerweise zugeordnet werden. Die Summen, Produkte, Komplemente und

---

1) C. Kuratowski: Sur l'opération $\bar{A}$ de l'analysis situs, Fund. Math. III (1922), und Topologie I (1933).

2) Für die Literatur verweise ich den Leser auf den Bericht von G. Köthe: Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie, Jahresber. D. M. V. Bd. **47** (1937).

3) M. H. Stone: Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **41** (1937).

4) Da bei unserer Theorie kein Begriff von Punkten a priori in Betracht kommt, so soll man statt Menge besser Element sagen. Diese Stellungnahme ist betont bei O. Ore: On the foundation of abstract algebra. I, Ann. of Math. Vol. **36** (1935).

5) U_I bedeutet das grösste offene Element, welches von erster Kategorie ist, und es gilt $X^{pcpcp}=D(X)+XU_I$. Wir schreiben deshalb $X^{pcpcp}=D(X)$ (mod U_I).

6) Indessen ist Herrn S. Kakutani gelungen, eine nicht ganz formale, aber allgemeinere Theorie zu entwickeln, die auch Masstheorie umfasst. Der Grundgedanke beruht auf die Klassenteilung durch Ideale. Seine Mitteilung soll demnächst in dieser Proceeding erscheinen.

Abschliessungen sollen ferner die folgenden, offenbar nicht voneinander unabhängigen, Axiome erfüllen:

S_1: $X+Y=Y+X$. P_1: $XY=YX$.

S_2: $(Y+Y)+Z=X+(Y+Z)$. P_2: $(XY)Z=X(YZ)$.

S_3: $X+0=X$ (0=Nullelement). P_3: $X0=0$.

D: $X(Y+Z)=XY+XZ$.

C_1: $X^{cc}=X$.[1]

C_2: $XX^c=0$. $(X\subset X)$.[2]

C_3: $(X+Y)^c=X^cY^c$, $(XY)^c=X^c+Y^c$.

C_4: $XY^c=0$, $YX^c=0\rightarrow X=Y$. $(X\subset Y,\ Y\subset X\rightarrow X=Y)$.

A_1: $X^{aa}=X^a$.

A_2: $XX^{ac}=0$. $(X\subset X^a)$.

A_3: $(X+Y)^a=X^a+Y^a$.

Das System $\mathfrak{X}$ wollen wir topologischen Verband nennen.

Neben den bekannten Formeln

(1) $$X+XY=X,\qquad X(X+Y)=X$$

(2) $$Y(X+X^c)=Y,$$

hat man folgendes fundamentalen Lemma:[3]

(U) $$U=U^{cac}\ (U \text{ offen})\rightarrow X^aU\subset(XU)^a.$$

Beweis. $$X^aU(XU)^{ac}=X^aU^{cac}(XU)^{ac}=X^a(U^c+XU)^{ac}$$
$$=X^a(U^c+X)^{ac}=X^aX^{ac}U^{cac}=0.$$

Man nennt das Element X nirgendsdicht, wenn $X^{acac}=0$, and regulär offen,[4] wenn $X=X^{acac}$. Bezeichnet man X^{acac} kürzehalber mit X^ρ, so besteht wegen der bekannten Identität von Kuratowski die Formel

(3) $$X^{\rho\rho}=X^\rho.$$

Wir haben ferner

(4) $$X\subset Y\rightarrow X^\rho\subset Y^\rho,$$

(5) $$(XY)^\rho\subset X^\rho Y^\rho,\qquad (X+Y)^\rho\supset X^\rho+Y^\rho.$$

Mit Hilfe von (U) beweist man dann leicht

(6) $$X^\rho=0\rightarrow(X+Y)^\rho=Y^\rho,\qquad (YX^c)^\rho=Y^\rho,\qquad \text{usw.}$$

---

1) Die Bezeichnung X^c habe ich aus der Zaryckischen Arbeit aufgenommen. M. Zarycki: Quelques notions fondamentales de l'analysis situs au points de vue de l'algèbre de la logique, Fund. Math. IX (1927).

2) $X\subset Y$ ist nach Definition gleichbedeutend mit $XY^c=0$. XY^c entspricht $X-Y$ in der gewöhnlichen Schreibweise.

3) Die Formel (U) hat axiomatischen Charakter.

4) Die Benennung nach Kuratowski, Fund. Math.. III.

Nun besteht für jedes X

(7) $$(X^a X^{aca})^\rho = 0\,,$$

woraus folgert man

(R) $$(X^a X^c)^\rho = (X^\rho X^c)^\rho = (X^\rho X^{ca})^\rho = (X^a X^{ca})^\rho$$
$$= (X^{ca} X)^\rho = (X^{c\rho} X)^\rho = (X^{c\rho} X^a)^\rho\,.$$[1]

Z. B. beweist man die beiden ersten Gleichheiten folgendermassen:

(i) $$X^a = X^a(X^{aca} + X^{acac}) \rightarrow X^a X^c \subset X^a X^{aca} + X^\rho X^c$$
$$\rightarrow (X^a X^c)^\rho = (X^\rho X^c)^\rho$$

(ii) $$(X^\rho X^c)^a = (X^\rho X^{ca})^a \ \big(\text{wegen } (U)\big) \rightarrow (X^\rho X^c)^\rho = (X^\rho X^{ca})^\rho\,.$$

Wir wollen nun X *regulär* nennen, wenn $(X^a X^{ca})^\rho = 0$, wenn also wegen (R) jedes beliebige der Glieder in (R) gleich 0 ist. Dann sind die Summe und das Produkt beider regulärer Elemente X und Y wieder regulär. Schreibt man ferner $X \approx Y$, falls X und Y regulär sind mit $X^\rho = Y^\rho$, so hat man folgende Formel

(8) $$X \approx Y \rightleftarrows XY^c \approx 0\,, \quad YX^c \approx 0\,.$$

§ 2. Wenn man noch ein weiteres Axiom

A_4: $0^a = 0$

hinzufügt und X^{acaca} kurz mit X^a bezeichnet, so bestehen

(9) $$X^a = 0 \rightleftarrows X^\rho = 0\,, \qquad X^a \subset Y^a \rightleftarrows X^\rho \subset Y^\rho.$$

(10) $$X^{aa} = X^a\,, \qquad (X+Y)^a = X^a + Y^a.$$

Wir wollen X^a die *reguläre Ableitung* von X nennen. Die Formeln (4), (6), (7), (8), (R) bleiben noch richtig, wenn man darin ρ durch a ersetzt. Schreibt man

(11) $$X^a = X^a X^a + X^a X^{ac} = X^a + X^a X^{ac}\,, \qquad X = XX^a + XX^{ac}\,,$$

so kann man daraus ablesen: *Durch reguläre Ableitung lässt sich X bzw. X^a in den dichten und den nirgendsdichten Teil zerlegen.*

§ 3. Wir setzen nunmehr voraus, dass für jede Klasse $\mathfrak{A} = \{A\}$ von Elementen $A \in \mathfrak{X}$ eindeutigerweise $\sum_{(A \in \mathfrak{A})} A$ und $\prod_{(A \in \mathfrak{A})} A$ erklärt sind, die die Axiome S, P, D, C (mit unendlich vielen Elementen) in § 1 erfüllen. Es sei N_σ die Klasse aller Elemente von erster Kategorie. Setzt man für X: $D(X) = (\sum U)^c$, wo U über alle offenen U mit $XU \in N_\sigma$ zu nehmen ist, und

(p) $$X^p = X + D(X)\,,$$

so gelten

1) Vgl. M. H. Stone, a. a. O., S. 402.

$$P_1:\ X^{pp}=X^p\,,\qquad P_2:\ X\subset X^p\,,\qquad P_3:\ (X+Y)^p=X^p+Y^p\,,$$

$$(\pi)\qquad X^{pcpcp}=D(X)+XU_I\,,$$

wobei U_I das grösste offene Element,[1] welches von erster Kategorie ist. Bezeichnet man X^{pcpcp} abkürzend mit X^π und definiert

$$X=0\ (\mathrm{mod}\ U_I)\ \underset{\mathrm{Def.}}{\widetilde{=}}\ X\subset U_I\,,$$

ebenso wie für $X=Y$ (mod U_I) und $X\subset Y$ (mod U_I), so schliesst man in Analogie zur regulären Ableitung X^a sofort auf das Bestehen der Formeln (4), (6), (7), (8), (R), und (11) (mod U_I), wobei a und α durch p bzw. π zu ersetzen sind. Man sieht, dass durch $X^\pi=0$ (mod U_I) Element von erster Kategorie charakterisiert ist. Nennt man alsdann X mit $(X^pX^{cp})^\pi=0$ (mod U_I) p-regulär, so stimmt X mit dem Elemente von Bairescher Eigenschaft überein.[2] Die Eigenschaften solcher Elemente kann man aus den folgenden Formeln ableiten.

$$P_4:\quad X^a\supset X^p,\qquad X^a\supset X^\pi=Y\ (\mathrm{mod}\ U_I)\,,\qquad \text{wobei } Y=Y^a\subset U_I^c.$$

$$P_5:\quad (X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n+\cdots\cdots)^p=X_1^p+X_2^p+\cdots\cdots+N,\ N^a=0\,.$$

$$P_6:\quad (X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n+\cdots\cdots)^\pi=X_1^\pi+X_2^\pi+\cdots\cdots+N,\ N^a=0\,.$$

§ 4. Wir gehen jetzt zur Erweiterungsfrage über. Es sei $\mathfrak{Y}$ ein System von Elementen $X, Y, \ldots\ldots$, die die Axiome S, P, D in § 1 erfüllen.

Dafür, dass ein Verband $\mathfrak{Y}$ mit S, P, D zu einem Verband mit Komplementen C_1, C_2, C_3, C_4 in § 1, d. h. zu einer Booleschen Algebra erweitert werden kann, ist das Bestehen von (1) notwendig und hinreichend.

Die Notwendigkeit ist wegen (1) klar. Um die Hinlänglichkeit zu beweisen, bemerken wir zunächst folgendes:

In einem Verband mit S, P, D sind C_1, C_2, C_3, C_4 gleichwertig mit C_1, C_2, C_3 und C_4^* : $Y(X+X^c)=Y$.

Um unseren Satz zu beweisen, führen wir für jedes X eindeutigerweise das Element X^c, das zusammen mit $S, P, D, C_1, C_2, C_3, C_4^*$ erfüllt, abstrakt ein. Dann lässt sich zeigen, dass alle Formen von der Gestalt $X_o+Y_o^c+X_1Y_1^c+\cdots\cdots+X_nY_n^c$ für alle X, Y und n eine Boolesche Algebra bilden.

Ist der Verband $\mathfrak{Y}$ mit S, P, D mit einer Topologie A_1, A_2, A_3 (§ 1) versehen und ist ferner jedem Elemente X der offene Kern X^o erklärt derart, dass

$$O_1:\ X^{oo}=X^o,\qquad O_2:\ X^o\subset X\,,\qquad O_3:\ (XY)^o=X^oY^o,$$

so kann man $\mathfrak{Y}$ zum topologischen Verband erweitern, indem man alle Formen von der Gestalt $U_o+A_o^c+U_1A_1^c+\cdots\cdots+U_nA_n^c+\cdots\cdots$, wobei $U_n=$

---

1) Ein solches existiert nach einem Satz von S. Banach: Théorèmes sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. XIV (1930).

2) Denn, setzt man $X=XX^\pi+XX^{\pi c}=X^\pi(X^\pi X^c)^c+XX^{\pi c}$ 'so ist $X=RP^c+Q$, wobei R regulär offen und P und Q von der ersten Kategorie sind.

U_n^o (offen) und $A_n = A_n^a$ (abgeschlossen) sind, als offene Elemente abstrakt einführt.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{F}$ das System aller eindeutigen reellen Funktionen $f(x)$ auf dem euklidischen R^n, um den einfachsten Fall als Beispiel zu betrachten, und seien $f(x)+g(x)=\mathrm{Max}\big(f(x), g(x)\big), f(x)\cdot g(x)=\mathrm{Min}\big(f(x), g(x)\big)$. Man setze ferner $f(x)^a = \bar{f}(x)$ und $f(x)^o = \underline{f}(x)$, wobei $\bar{f}(x)$ und $\underline{f}(x)$ die obere bzw. die untere Limesfunktion bedeuten. Indem man $\mathfrak{F}$ zum topologischen Verband erweitert,[1] sieht man, dass man aus den oben abgeleiteten Formeln Sätze über Funktionen ablesen kann. So z. B. spricht $(f^a f^{aca})^a = 0$ aus, dass die Unstetigkeitsstelle der oberhalb stetigen Funktion (d. h. $f=f^a$) von erster Kategorie ist. Ebenso spricht $(X^p X^{pcp})^\pi = 0$ aus, dass die Bairesche Funktion bis auf eine Menge erster Kategorie stetig ist. Um die Tragweite unserer Rechnung nochmals zu probieren, beweisen wir den Baireschen Satz, wonach die Unstetigkeitsstelle der Grenzfunktion $f(x)$ stetiger Funktionen $f_n(x)$ von der ersten Kategorie ist. Stetig heisst $f_n(x)=f_n(x)^a=f_n(x)^{cac}$, d. h. gleichzeitig abgeschlossen und offen. Konvergenz ist durch die folgenden beiden Gleichungen ausgedrückt.

$$\begin{aligned} f &= \overline{\lim} f_n = (f_1+f_2+\cdots\cdots)\,(f_2+f_3+\cdots\cdots)\,(\cdots\cdots) \\ &= \underline{\lim} f_n = f_1 f_2 \cdots\cdots + f_2 f_3 \cdots\cdots + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Dann ist, weil f_n offen sind,

$$\begin{aligned} \text{(i)}\quad f^a &\subset (f_1+f_2+\cdots\cdots)^a\,(f_2+f_3+\cdots\cdots)^a \cdots\cdots \\ &= (f_1+f_2+\cdots\cdots+g_1)\,(f_2+f_3+\cdots\cdots+g_2)\cdots\cdots, \quad \text{wobei } g_n^a = 0, \\ &= f+h_1, \qquad (h_1)^\pi = 0. \end{aligned}$$

Ebenso ist, weil f_n^c offen sind,

$$\begin{aligned} \text{(ii)}\quad f^{ca} &= (f_1 f_2 \cdots\cdots + f_2 f_3 \cdots\cdots + \cdots\cdots)^{ca} \\ &\subset (f_1^c+f_2^c+\cdots\cdots)^a\,(f_2^c+f_3^c+\cdots\cdots)^a \cdots\cdots \\ &= f^c + h_2, \qquad (h_2)^\pi = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $f^a f^{ca} = f^a - f^{cac}$, also auch die Unstetigkeitsstelle von f, von der ersten Kategorie ist.

1) Die erweiterte f erscheint als die Punktmenge in R^{n+1} mit der Eigenschaft, dass sie durch jede zur $(n+1)$-ten Koordinatenachse parallele Gerade in regulär offener Menge geschnitten wird.