76. Über Abbildungen der Kompakten auf die Sphäre.

Von Ryoji SAKATA.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Es sei R ein Kompaktum. Sei ferner $\mathfrak{F}_n(R)(n=0,1,2,\dots)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von R auf Teilmengen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes E_n. Wir bezeichnen für eine ganze Zahl $m \geqq -1$ und $\varepsilon > 0$ mit $\mathfrak{F}_n^m(R)$ bzw. $\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ die Menge aller Abbildungen $f \in \mathfrak{F}_n(R)$, für die $\dim \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=P] \leqq m$ bzw. $\mathrm{d}_{m+1}\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=P] < \varepsilon$[1] gilt, wobei P der Punkt mit den Koordinaten $(0,0,\dots,0)$ des E_n ist.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis von

Satz 1.[2] *Dafür, dass die Dimension des Kompaktums R ist $\leqq n$, ist jede der beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

1) *es sei: A eine beliebige abgeschlossene Menge von R, S_k die k-dimensionale Sphäre. Jede stetige Abbildung $f \in S_k^A$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $f^* \in S_k^{R-E}$ erweitern, wobei E eine gewisse in R abgeschlossene höchstens $(n-k-1)$-dimensionale Menge ist.* $(k=0,1,\dots)$

2) $\mathfrak{F}_k^{n-k}(R)$ *ist dicht in* $\mathfrak{F}_k(R)$. $(k=0,1,\dots)$

Da jedes höchstens n-dimensionale Kompaktum die beiden oben erwähnten Bedingungen erfüllt, und da anderseits die Bedingung 2) aus der Bedingung 1) folgt,[3] genügt es, um den Satz 1 zu beweisen, nur zu zeigen, dass für jedes Kompaktum R $\dim R \leqq n$ aus der Bedingung 2) folgt. Es handelt sich mit anderen Worten um den folgenden

Satz 2. Liegt $\mathfrak{F}_n^m(R)$ dicht in $\mathfrak{F}_n(R)$, so ist $\dim R \leqq m+n$.

Dem Bewis des Satzes 2 schicken wir zwei Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 1.[4] *Es seien zwei metrische Räume A, B vollständig und separabel. Ist M eine im Produktraum $A \times B$ dichte G_δ-Menge, so gilt:*

A enthält eine in A dichte Menge N mit der Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt a von N eine in B dichte Menge von Punkten x gibt, so dass alle Punkte (a, x) zu *M gehören.*

Beweis. Es sei $R_n(n=1,2,\dots)$ eine abzählbare Basis von B. Es sei ferner $M=\prod_{m=1}^{\infty} O_m$, O_m offen. Wir bezeichnen mit $E_{mn}(n=1,2,\dots)$ die Menge aller Punkte $a \in A$, zu denen es wenigstens einen Punkt $r_n \in R_n$ gibt, so dass $(a, r_n) \in O_m$ gilt. Wie man leicht bestätigt, ist

---

1) Unter $\mathrm{d}_n(M)$ versteht man die n-te Urysohnsche Konstante von M.

2) Die Grundidee dieses Beweises rührt hauptsächlich von W. Hurewicz her.
W. Hurewicz, Fund. Math. **24** (1935), 144–150.
W. Hurewicz, Sitzungsber. Preuss. Akad. **24** (1933), 754–768.

3) Vgl. dazu etwa K. Borsuk, Fund. Math. **29** (1937), 161–166.

4) Diese Bemerkung, die mir die Möglichkeit gab, die ursprüngliche Redaktion meiner Arbeit zu vereinfachen, verdanke ich Herrn S. Kakutani.

jedes E_{mn} eine in A offene und dichte Menge. Aus dem Baireschen Dichtigkeitssatz folgt, dass $N=\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}E_{mn}$ auch in A dicht liegt. Demnach ist für jeden Punkt x von N die Menge aller Punkte $y\in G_m$, für die $(x,y)\in O_m$ gilt, in B offen und dicht. Genau wie vorhin ist $G=\prod_{m=1}^{\infty}G_m$ eine in B dichte Menge, und daraus folgt die Behauptung, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. $\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ *ist eine in* $\mathfrak{F}_n(R)$ *offene Menge.* $\mathfrak{F}_n^m(R)$ *ist dementsprechend eine* G_δ*-Menge.*

Beweis. Es sei K_r die Kugel mit dem Radius r um den Mittelpunkt P im E_n. Wir wollen zunächst zeigen, dass man zu jedem ε ein solches δ finden kann, so dass für $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)=P]<\varepsilon$ die Beziehung $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]<\varepsilon$ gilt. Ist in der Tat $\mathfrak{U}=\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ eine offene ε-Überdeckung von $\underset{x}{E}[f(x)=P]$, deren Ordnung gleich $m+1$ ist, so folgt definitionsgemäss $d_{m+1}(\sum_{i=1}^{n}G_i)<\varepsilon$, woraus sich die behauptete Ungleichung $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]<\varepsilon$ ergibt, sobald δ so gewählt ist, dass $\sum_{i=1}^{n}G_i\supset\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]$ ist. Zu gegebenen $f\in\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ und $\varepsilon>0$ wählen wir δ so wie oben. Bei beliebiger Wahl der Abbildung $\varphi\in\mathfrak{F}_n(R)$, die der Bedingung $\rho\ (f,\varphi)<\delta$ genügt, gilt offenbar $f\left(\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]\right)\subset K_\delta$, also erst recht $\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]\subset\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]$; daraus folgt $d_{m+1}\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]\leqq d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]<\varepsilon$, also $\varphi\in\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$. Die zweite Hälfte folgt unmittelbar aus $\mathfrak{F}_n^m(R)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{F}_{n\frac{1}{\nu}}^m$, w. z. b. w.

Beweis des Satzes 2. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion in bezug auf n (bei festem m). Für $n=0$ ist die Behauptung trivial, da die Voraussetzung des Satzes 2 für $\dim R>m$ wegen $\mathfrak{F}_0^m(R)=0$ nicht erfüllt ist. Die Behauptung sei also für $n'<n$ schon bewiesen. Indem wir $\mathfrak{F}_n(R)$[1] als Cartesisches Produkt $\mathfrak{F}_1(R)\times\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ auffassen, ergibt sich auf Grund des Hilfssatzes 1 mit Rücksicht auf den Hilfssatz 2: in $\mathfrak{F}_1(R)$ existiert eine überall dichte Menge von Abbildungen f mit der Eigenschaft, dass diejenigen Abbildungen $\varphi\in\mathfrak{F}_{n-1}(R)$, für die $(f,\varphi)\in\mathfrak{F}_n^m(R)$ gelten, eine in $\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ dichte Menge bilden. Setzt man zur Abkürzung $R_f=\underset{x}{E}[f(x)=0]$ für $f\in\mathfrak{F}_1(R)$, so ist die Beziehung $(f,\varphi)\in\mathfrak{F}_n^m(R)$ für $\varphi\in\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ damit gleichbedeutend, dass $\dim\left[\underset{x}{E}[\varphi(x)=P']\cdot R_f\right]\leqq m$ gilt, wobei P' der Punkt $(0,0,\dots,0)$ des E_{n-1} ist. Man bestätigt nun leicht, dass $\mathfrak{F}_{n-1}^m(R_f)$ in $\mathfrak{F}_{n-1}(R_f)$ dicht ist. Hieraus folgt laut unserer Voraussetzung $\dim R_f\leqq m+n-1$. Anders ausgedrückt: die Gesammtheit der Abbildungen $f\in\mathfrak{F}_1(R)$, für die $\dim R_f\leqq m+n-1$ gilt, liegt in $\mathfrak{F}_1(R)$ dicht.

Wir betrachten nun zwei disjunkte und abgeschlossenne Mengen A und B von R und setzen $g(x)=\rho(x,A)-\rho(x,B)$. Da die letztgenannte Abbildung g zu $\mathfrak{F}_1(R)$ gehört, und da eine positive Zahl $\varepsilon>0$ derart

1) $\mathfrak{F}_n(R)$, wie üblich als ein metrischer Raum, ist separabel und vollständig.

existiert, dass $g(x) \leqq -\varepsilon < 0$ bzw. $\geqq \varepsilon > 0$ auf A bzw. B ist, so folgt aus dem soeben bewiesenen, dass es unter diesen Abbildungen auch solche geben muss, für die $\dim R_f \leqq m+n-1$ und $R_f \cdot A = R_f \cdot B = 0$ gelten. Dann ist R_f eine A und B trennende höchstens $(m+n-1)$-dimensionale Menge. Daraus folgt $\dim R \leqq m+n$, w. z. b. w.

Hiermit ist der Satz 2 bewiesen, und dadurch ist auch der Beweis des Satzes 1 vollständig zu Ende geführt.