8. *Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 13, 1939.)

1. M. W. Seidel[1] a démontré un théorème suivant qui peut être considéré comme un point de départ d'une série des recherches sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage du contour d'un domaine d'holomorphie.[2]

Théorème A (Seidel). *Soit $f(z)$ une fonction analytique qui est bornée dans un domaine D,[3] limité par une courbe jordanienne Γ, simple et fermée. Soit z_0 un point de Γ. Alors, nous avons* $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|f(z)| = \overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z' \\ z'\neq z_0}}}\,|f(z)|$[4], *$z'$ désignant les points arbitraires de Γ.*

D'autre part, M. A. Beurling[5] a considéré le même théorème dans les conditions plus larges:

Théorème B (Beurling). *Soient D un domaine et z_0 un de ses points frontiers, régulier pour le problème de Dirichlet.[6] Supposons qu'une fonction uniforme $f(z)$ soit holomorphe et bornée dans D. Alors nous avons* $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|f(z)| = \overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z' \\ z'\neq z_0}}}\,|f(z)|$, *$z'$ désignant les points frontiers.*

M. S. Irié a remarqué enfin que, dans le cas où le point frontier z_0 est accessible et contenu dans un continu situé en dehors de D (ce qui entraîne la régularité de z_0 pour le problème de Dirichlet), la démonstration peut être beaucoup simplifiée.[7] Or, le but de cette Note est de montrer que la condition de régularité du point z_0 pour le problème de Dirichlet dans le théorème B est superflue. Nous allons donc démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soient D un domaine quelconque et z_0 un de ces points frontiers qui n'est pas isolé. Supposons qu'une fonction uniforme $f(z)$*

---

1) W. Seidel: On the cluster values of analytic functions; Transactions of the American Mathematical Society, vol. **34** (1932), pp. 1–21. Il s'agit du "Theorem 1" de p. 3. de ce mémoire.

2) Cf. J. L. Doob: On a theorem of Gross and Iversen; Annals of Mathematics, vol. **33** (1932), pp. 753–757; A. Beurling: Étude sur un problème de Majoration, Thèse de Upsal (1933); K. Noshiro: On the theory of the cluster sets of analytic functions, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, vol. VI. pp. 217–231.

3) Nous appelons ainsi tout ensemble ouvert et connexe.

4) $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|f(z)|$ désigne la plus grande limites de $|f(z)|$, lorsque z tend, d'une maniere quelconque mais en restant toujours dans D, vers le point z_0.

5) A. Beurling: loc. cit. p. 101.

6) Quant à la définition, voir p. ex. A. Beurling: loc. cit. p. 66; M. Brelot: Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne, Mathematica, vol. VII (1933), p. 153.

7) S. Irié: Sur un théorème de M. Beurling, Proc. **13** (1937), 244–246. D'ailleurs, c'est seulement ce cas considéré par M. S. Irié que nous nous servirons, dans la suite, du théorème B.

soit holomorphe et bornée dans D. Alors nous avons toujours $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}|f(z)|=\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}|f(z)|$, *$z'$ désignant les points frontiers.*

Demonstration. Posons $|f(z)|\leq M$, $z\in D$, $M<\infty$, $l=\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}|f(z)|$ et $m=\overline{\lim\limits_{z'=z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}|f(z)|$, $l\leq M$, $m\leq M$. Supposons par impossible que nous ayons $l>m$.

Soit ε un nombre réel positif assez petit de sorte qu'on ait $5\varepsilon<l-m$, et écrivons dans le plan w deux cercles du même centre $w=0$ aux rayons l et $m+\varepsilon$ respectivement. Désignons par $S_{z_0}^{(D)}$ l'ensemble de toutes les valeurs α pour lesquelles il existe une suite de points z_n de D, telle que $z_n\to z_0$, $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$, et par $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ le produit $\prod\limits_{n-1}^{\infty}\bar{A}_n$, où $\bar{A}_n$ désigne la fermeture de A_n et A_n est la somme de tous les ensembles $S_{z'}^{(D)}$, $A_n=\sum\limits_{z'}S_{z'}^{(D)}$ la sommation s'étendant à tous les points z' de frontiers de D, qui satisfont à $0<|z'-z_0|<1/n$. Enfin, désignons par $R_{z_0}^{(D)}$, l'ensemble de toutes les valeurs α pour lesquelles il existe une suite de points z_n de D, telle qu'on ait $z_n\to z_0$, $\alpha=f(z_n)$.[1]

$S_{z_0}^{(D)}$ est un ensemble fermé et borné. Il est contenu dans le cercle $|w|\leq l$ et il existe au moins un point p sur la circonference $|w|=l$. L'ensemble $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est également fermé et borné. Celui-ci est contenu dans le cercle $|w|\leq m$. Donc, le point p n'appartient pas à $S_{z_0}^{(\Gamma)}$. Il existe aussi un nombre réel positif $r>0$, tel que le cercle $|z-z_0|\leq r$ ne contienne que des points frontiers z' de D dont l'ensemble $S_{z'}^{(D)}$ est contenu dans le cercle $|w|\leq m+\varepsilon$. Par suite, à tous les point frontiers z' de D qui sont situé sur la circonference $|z-z_0|=r$, correspondent de petits cercles $|z-z'|<c(z')$ $\big(c(z')>0\big)$, tels qu'on ait $|f(z)|<m+2\varepsilon$ pour tout z de D qui appartient à ces cercles. Les points frontiers de D qui sont situés sur la circonference $|z-z_0|=r$, forment un ensemble A fermé et borné (qui peut être vide). Donc, nous pouvons choisir, d'après un théorème de Borel-Lebesgue, un nombre fini de ces cercles, de sorte que tout point de A soient contenus dans l'intérieur de l'un de ces cercles choisis. Designons-les par $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$. Alors, le domaine $\varDelta$ qui est la partie du cercle $|z-z_0|<r$, hors des cercles $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$, contient le point z_0. La partie F de la circonference $|z-z_0|=r$, qui n'est pas située dans les intérieures des $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$, et qui est contenue dans D se constitute d'un nombre fini d'arcs de la circonférence $|z-z_0|=r$ (ou cette circonférence toute entière). Elle contient un nombre fini des points $z_1, z_2, \dots, z_{\lambda'}$ où l'on a $f'(z_i)=0$ $(i=1, 2, \dots, \lambda')$. Comme des points de cette propriété sont isolés dans D, nous pouvons écrire de petits cercles dans D des centres z_i $(i=1, 2, \dots, \lambda')$, et en excluant ces petits cercles, nous aurons un domaine $\varDelta^*$, modifié de $\varDelta$, de sorte que nous pouvons supposer qu'on a $f'(z)\neq 0$ pour tout point z de F.

Or, nous allons démontrer d'abord que *le point p n'appartient pas*

1) Pour ces notations, cf. K. Noshiro: loc. cit. p. 217–218.

à l'ensemble $R_{z_0}^{(D)}$. En effet, supposons par impossible que p appartient à $R_{z_0}^{(D)}$. Les points z tels que $f(z)=p$, $z \in D$, $|z-z_0| \leq r$ sont un nombre infini dénombrable. Nous les désignons par $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$. Ces points n'ont qu'un point limite et ces point limite est justement z_0. Donc, il n'existe qu'un nombre fini des points a_n qui sont situés sur F. En écrivant de petits cercles dans D aux centres de ces points, et en les excluant, nous pouvons modifier le domaine Δ^*, de sorte que nous pouvons supposer la partie F de la frontiere de Δ^* qui fait partie de D et qui est située en dehors des cercles $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ ne contienne que des points z ou l'on a $f(z) \neq p$ et $f'(z) \neq 0$.

Posons $D^*=D \cdot \Delta^*$. Comme z_0 est un point intérieur de Δ^*, les points $a_1, a_2, a_3, \cdots$, à un nombre fini près, soit $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots$, sont contenu dans D^*. Désignons par d la demi-droite (p, ∞) dans le plan w, qui est une partie de la droite passant par les points $w=0$ et p, et dont p est l'extremité.

Or, sur chaque feuillet de la surface de Riemann qui correspond au point $a_{N+n}(n=1, 2, 3, \ldots)$, faisons varier le variable w suivant la direction d.[1)]

Si l'on rencontre aux points de ramification, écrivons de petits cercles sur la surface et suivons leurs circonférences dans une direction déterminée jusqu'à ce que nous retrouvons la droite d. Et ensuite, continuons ainsi *à condition que le point variable correspondant z appartienne à l'ensemble D^**, nous obtiendrons un point final β_{N+n}, tel que $|\beta_{N+n}| \leq M$. Au cours de ce prolongement, il existe au plus une infinité dénombrable de points de ramification. Donc, nous pouvons supposer la somme des diamètres de cercles que nous avons écrits plus haut est inférieure à $M/3^n$.

Ce prolongement nous donne un chemin γ_n sur le plan z, qui satisfait aux propriétés suivantes:

(1) *γ_n départ du point a_{N+n}, et se termine à un point b_{N+n} qui est situé sur l'ensemble F.* En effect, s'il existe d'abord des points sur γ_n qui s'approchent vers z_0, on aurait $\beta_{N+n} \in S_{z_0}^{(D)}$, ce qui est impossible puisqu'on a $|\beta_{N+n}| > l$. S'il existe des points sur γ_n qui s'approchent vers un point frontier de D ou des circonférences des $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ on aurait $|\beta_{N+n}| \leq m+2\varepsilon$. S'il existe des points sur γ_n qui s'approchent vers un point b intérieur de D^*, on aurait $f(b)=\beta_{N+n}$, et nous pouvons prolonger au dela de β_{N+n}. Donc, nous avons nécessairement un point b_{N+n} de F qui correspond à β_{N+n}.

(2) *γ_n se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques.*

(3) *Pour les indices différents $n \neq n'$, γ_n et $\gamma_{n'}$ sont disjoints.* Car, sinon, nous aurons un premier point z de γ_n qui est situé sur $\gamma_{n'}$ et nous avons $f'(z)=0$. Ceci est contradictoire à notre supposition qu'au cours de prolongement nous n'avons pas un point de ramification.

Or, il y a deux cas possibles. I[er] cas: la borne inférieure de $|\beta_{N+n}-p|$ est 0. Dans ce cas, nous avons une suite partielles de β_{N+n},

---

1) Si l'on a $f'(a_{N+n})=0$, il existe plus qu'un feuillet, qui correspondent au point a_{N+n} du plan z. Dans ce cas nous en choisissons un et nous faisons varier w sur ce feuillet choisi.

soit β_{N+n_ν}, qui tend vers p. Comme l'ensemble b_{N+n_ν} est fermé et borné, nous avons nécessairement au moins un point limite des b_{N+n_ν}. Nous pouvons donc poser $b=\lim\limits_{\nu'\to\infty} b_{N+n_{\nu'}}$. Par suite, nous avons $f(b)=p$, $b\in F$, ce qui est contaire à notre hypothèse (voir p. 29). II$^{\text{me}}$ cas: la borne inférieure de $|\beta_{N+n}-p|$ est positive, soit $\rho>0$. Dans ce cas, soit π un entier positif plus grand que M/ρ. Alors la somme de tous les diamètres des petits cercles que nous avons écrits pour éviter les points de ramification au cours du prolongement $\gamma_n(n=\pi+1,\pi+2,\dots)$ est inférieure à $\sum\limits_{\pi+1}^{\infty} M/3^n<M/2\pi<\rho/2$. Donc, il existe un point ξ de la droite d tel que $0<|\xi-p|<\rho$, et par suite il existe, sur chaque $\gamma_n(n>\pi)$ un point x_n tel que $f(x_n)=\xi$. Or, aucun des points limites des x_n n'est situé dans D (et par suite sur F puisque F est contenu dans D). Il n'est situé sur la frontière $\neq z_0$ de D ou sur les circonférences $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$, puisqu'alors on aurait $|\xi|\leq m+2\varepsilon$. Donc x_n tendent nécessairement ver z_0. Ceci est également absurde, car dans ce cas nous avons $\xi\in R_{z_0}^{(D)}\subseteq S_{z_0}^{(D)}$ et $|\xi|\leq l$. Nous avons vu donc que p n'appartient pas à $R_{z_0}^{(D)}$.

Or, p appartient donc à l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(D)}-R_{z_0}^{(D)}$. C'est un point exceptionnel. D'après un théorème de M. Noshiro,[1] le point z_0 doit être un point accessible et p doit être une valeur asymptotique. Il existe donc un chemin γ dans D aboutissant vers z_0, tel qu'on a

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=p\,;\quad z\in\gamma\,.$$

Comme z_0 est un point frontier non isolé. Il existe une suite des points frontiers $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ $(p_n\in\Delta^*)$ tendant vers z_0. Sur les circonférences $|z-z_0|=|p_n-z_0|$, il existe un arc (e_n, f_n) situé dans D sauf le point f_n, tel que $e_n\in\gamma$ et que f_n soit un point frontier. Cet arc (e_n, f_n) se transforme par $f(z)$ en une courbe ω_n continue (non nécessairement simple), qui part du point $f(e_n)$ près de p, et qui passe par des points du cercle $|z|<m+2\varepsilon$.

Écrivons un cercle du centre p, au rayon ε, et désignons par K la circonférence de ce cercle. Or, le plus grand ensemble limite,[2] de ω_n, soit ω, est contenu dans $S_{z_0}^{(D)}$. Comme tous les ω_n contiennent au moins un point sur K, ω et par suite $S_{z_0}^{(D)}$ contiennent au moins un point sur K.

D'autre part, nous allons montrer que $S_{z_0}^{(D)}$ ne contient aucun point sur K. En effet, traçons d'abord deux tangentes T_1 et T_2 au cercle $|w|\leq m+2\varepsilon$ qui passent par le point p. Considérons le demi-plan limité par un de ces tangentes qui ne contient le cercle. Si un point φ de $S_{z_0}^{(D)}$ est contenu dans ce demi-plan, nous prenons un cercle S du centre η, $|\eta|>M$, convenablement choisi, dont l'intérieur contient le point φ, et dont l'extérieur contient le point p ainsi que le cercle $|w|\leq m+2\varepsilon$. Transformons le plan w par la fonction linéaire $t=t(w)=$

1) K. Noshiro, loc. cit. p. 218. Cf. aussi J. L. Doob, loc. cit. p. 756.

2) Le plus grand ensemble limite de w_n est l'ensemble de tous les points w dont tous les voisinages contiennent des points de w_n pour une infinité des indices n.

$(q-\eta)/(w-\eta)$, ou q est un point arbitraire de S. Considérons la fonction $F(z)=t\{f(z)\}$, et le domain $D-\gamma$. z_0 est un point frontier accessible de $D-\gamma$. La frontière de $D-\gamma$ contient le chemin γ, et la fonction uniforme et holomorphe $F(z)$ est bornée. Donc nous avons, d'après le theoreme B, $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|F(z)|=\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}\,|F(z)|$, où z' désigne un point frontier de $D-\gamma$. Cette égalité est une contradiction, car nous avons $t(\zeta)>1$, $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|F(z)|>1$ et $\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}\,|F(z)|\leq 1$.

Donc, les demi-plans (ouverts) P_1 et P_2 limités par les tangentes T_1 et T_2, qui ne contiennent pas le cercle $|w|\leq m+2\varepsilon$ sont disjoints de $S_{z_0}^{(D)}$.

Désignons par e_1 et e_2 les deux intersections de K et de deux tangentes T_1 et T_2. Prenons un petit cercle fermé U contenu dans P_1 (ou dans P_2) de rayon $<\varepsilon/32$, dont le centre est un point situé sur K, très voisin de e_1 (ou de e_2), de sorte que la distance du point e_1 (ou e_2) soit inférieure à $\varepsilon/16$. Tout point w de U n'appartient pas à $S_{z_0}^{(D)}$, non plus à $R_{z_0}^{(D)}$. Donc, à toute valeur w de U correspond un entier positif n tel que $f(z)$ n'est jamais égale à w dans l'intérieur du cercle $|z-z_0|<1/n$. Soit B_n l'ensemble de toutes les valeurs w de U telles que $f(z)$ ne soient jamais égales à w dans le cercle $|z-z_0|<1/n$. Nous avons donc $U=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. Par suite, il existe un indice n_0 tel que B_{n_0} n'est pas non dense. B_n étant un ensemble fermé, il existe un cercle $|w-\eta|<\sigma$ contenu dans B_{n_0}. Soit V le cercle du centre η et de rayon $(7/8)\cdot|p-\eta|$. Je dis que aucun point intérieur de V n'appartient jamais à $S_{z_0}^{(D)}$. En effet, si un de tels points φ appartient à $S_{z_0}^{(D)}$, transformons le plan w par $t=t(w)=(q-\eta)/(w-\eta)$, où q est un point arbitraire de la circonférence de V. Considérons la fonction $F(z)=t\{f(z)\}$ et le domain composant D^{**} de $D\cdot[|z-z_0|<1/n_0]$, qui contient le chemin γ. Il faut remarquer que le chemin γ peut être supposé contenu entièrement dans l'intérieur du cercle $[|z-z_0|<1/n_0]$. Donc, le théorème B, appliqué à la fonction $F(z)$ et le domaine $D^{**}-\gamma$, nous donne une contradiction. Donc, l'intérieur du cercle V est disjoint de $S_{z_0}^{(D)}$. Le cercle ouvert V contient tous les points de K, dont les distances du point e_1 (ou e_2) sont inférieures à $3\varepsilon/4$. Si les deux demi-plans P_1 et P_2 et les cercles V ainsi construits ne suffisent pas pour couvrir la circonférence K toute entère, prenons deux points d'intersectin e_1' ou e_2' de K et deux cercles V et répétons encore une fois le raisonnement que nous avons fait plus haut. Cela suffit, dans tous les cas, pour couvrir la circonférence K toute entière par des cercles qui sont disjoints de $S_{z_0}^{(D)}$ (avec les demi-plans P_1 et P_2). Ainsi, nous sommes amenés à une contradiction. c. q. f. d.

2. Quelques conséquences immédiates. Notre théorème s'exprime, tout d'abord, comme il suit:

Soient D un domaine quelconque et z_0 un de ses points frontiers qui n'est pas isolé. Soit encore $f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans D. Alors, pour toute valeur a situé hors de $S_{z_0}^{(D)}$, on a

$\rho(S_{z_0}^{(D)}, a)=\rho(S_{z_0}^{(\Gamma)}, a)$.[1] Par suite, pour tout sous-ensemble non vide A du complementaire de $S_{z_0}^{(D)}$, on a $\rho(S_{z_0}^{(D)}, A)=\rho(S_{z_0}^{(\Gamma)}, A)$.[2]

De cet énoncé résulte immédiatement l'inclusion $B(S_{z_0}^{(D)}) \subseteq B(S_{z_0}^{(\Gamma)})$.[3] M. K. Noshiro a posé[4] un problème si l'on peut obtenir cette inclusion en n'admettant aucune hypothèse de régularité de z_0 pour le problème de Dirichlet. Nous avons donc donné une réponse affirmative.

Par conséquent, l'ensemb le $G=S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est ouvert. Or, le complémentaire de $R_{z_0}^{(D)}$ est de première catégorie dans G, et par suite, $R_{z_0}^{(D)}$ est partout dense dans G. Donc, si $f(z)$ ne prend aucune valeur d'une infinité de fois au voisinage de z_0, on a toujours $S_{z_0}^{(D)}=S_{z_0}^{(\Gamma)}$.[5]

---

1) $\rho(E, a)$ désigne la distance minimum (sur la sphère de Riemann) entre a et un point variable de E.

2) $\rho(E, A)$ désigne la distance minimum (sur la sphère de Riemann) entre des points e et a, $e \in E$, et $a \in A$, variables dans ces ensembles resp.

3) $B(E)$ désigne l'ensemble des points frontiers (considérés sur la sphère de Riemann) de E.

4) K. Noshiro, loc. cit. p. 230, Remark 1.

5) Cf. K. Noshiro, loc. cit. p. 223. U. Minami, An extention of Phragmen-Lindelöf's theorem, Proc. **13** (1937), 241–243; Sur un théorème de Phragmen-Lindelöf. Tohoku Math. Journ. vol. **43**, (1937), pp. 85–93.