21. *Ein Beweis des Toeplitzschen Satzes über die normale Matrix.*

Von Kōiti KONDO und Sigeru HURUYA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 13, 1939.)

Eine n-reihige quadratische Matrix im Körper der komplexen Zahlen heisst normal, wenn sie mit ihrer adjungierten vertauschbar ist. In dieser kleinen Note wollen wir einen Beweis des wohlbekannten Toeplitzschen Satzes[1] über die normale Matrix geben, der lautet:

Eine Matrix A ist dann und nur dann mit Hilfe einer unitären Matrix auf die Diagonalform transformierbar, wenn sie normal ist.

Eine Matrix A, die sich mit Hilfe einer unitären Matrix auf die Diagonalform transformieren lässt, ist ersichtlich normal. Es gilt das Umgekehrte zu beweisen.

Da bekanntlich[2] das Minimalpolynom $m(x)$ von A dann und nur dann lauter von einander verschiedene Wurzeln hat, wenn A auf die Diagonalform transformierbar ist, zeigen wir zunächst, dass das Minimalpolynom von normaler Matrix keine mehrfache Wurzel hat.

Es sei A eine n-reihige normale Matrix, $\mathfrak{x}$ ein Vektor des n-dimensionalen Vektor-raumes V_n.

Hilfssatz 1. *Aus* $A\mathfrak{x}=0$ *folgt* $A^*\mathfrak{x}=0$.

Beweis. $(A^*\mathfrak{x}, A^*\mathfrak{x})=(\mathfrak{x}, AA^*\mathfrak{x})=(\mathfrak{x}, A^*A\mathfrak{x})=(A\mathfrak{x}, A\mathfrak{x})$. Daher gilt $A^*\mathfrak{x}=0$.

Hilfssatz 2. *Ist* $A^2=0$, *so ist* $A=0$.

Beweis. Da für alle Vektoren $\mathfrak{x}$ stets $A^2\mathfrak{x}=0$ ist, erhalten wir nach dem Hilfssatz 1 $A^*A\mathfrak{x}=0$. Folglich für alle $\mathfrak{x}$ gilt $(A\mathfrak{x}, A\mathfrak{x})=0$, d. h. $A=0$.

Hilfssatz 3. *Das Minimalpolynom* $m(x)$ *von* A *hat keine mehrfache Wurzel.*

Beweis. Wenn α eine Wurzel von $m(x)$ ist, so ist $m(x)=(x-\alpha)^k h(x)$. Wäre $k>1$, setze man $m_1(x)=(x-\alpha)^{k-1}h(x)$. Dann ist offenbar $m(x)\,|\,\big((m_1(x)\big)^2$ mithin gilt $\big(m_1(A)\big)^2=0$. Da $m_1(A)$ ersichtlich normal ist, so folgt aus dem Hilfssatz 2 $m_1(A)=0$. Dies ist aber unmöglich, denn $m_1(x)$ hat einen kleineren Grad als das Minimalpolynom $m(x)$ von A, w. z. b. w.

Es bleibt bloss noch zu zeigen, dass A mit Hilfe einer *unitären* Matrix auf die Diagonalform transformierbar ist. Dies ergibt sich aus dem folgenden

Hilfssatz 4. *Wenn* λ, μ *zwei verschiedene Eigenwerte von* A *sind, so sind die zwei zu* λ *bzw.* μ *gehörigen Eigenvektoren unitär orthogonal. D. h. aus* $A\mathfrak{x}=\lambda\mathfrak{x}$, $A\mathfrak{y}=\mu\mathfrak{y}$ *und* $\lambda\neq\mu$ *folgt* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=0$.

---

1) Toeplitz: Math. Zeitschr. **2** (1918), 187–197.

2) Schreier und Sperner: Vorlesungen über Matrizen, 68.

Beweis. Setzt man $A-\mu E=B$, so ist $B\mathfrak{y}=0$. Mithin folgt aus dem Hilfssatz 1 $B^*\mathfrak{y}=0$, d. h. $A^*\mathfrak{y}=\bar{\mu}\mathfrak{y}$. Es ist $\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=(\mathfrak{x}, A^*\mathfrak{y})=(\mathfrak{x}, \bar{\mu}\mathfrak{y})=\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Da $\lambda \neq \mu$ ist, erhalten wir $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=0$.

Damit ist alles bewiesen.