20. Charaktere linearer Gruppen.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 13, 1939.)

In der vorliegenden Note sollen alle einfachen Charaktere gewisser linearer Gruppen aufgestellt werden (**1. 3.** und **5.**), daraus werden sich einige Anwendungen auf die Zetafunktionen und Diskriminanten algebraischer Zahlkörper ergeben (**2. 4.** und **5.**).

1. Es sei $K=GF(p^n)$ ein Galoisfeld, $q=p^n-1$, und ω_0 eine primitive Einheitswurzel q-ter Ordnung in K; $\omega=\omega_0^r$, $rm=q$ $(m \neq 1)$. $\mathfrak{G}$ sei die Gruppe aller linearen Substitutionen

$$Px=\omega^i x+\alpha\,; \quad i=0,1,\dots,m-1\,; \quad \alpha\in K.$$

Wird $S_\alpha x=x+\alpha$, $Tx=\omega x$ gesetzt, so ist $S_\alpha\cdot S_\beta=S_{\alpha+\beta}$, $S_\alpha^{-1}=S_{-\alpha}$, $S_0=E$, $T^{-1}S_\alpha T=S_{\omega\alpha}$; daher ist $\mathfrak{S}=\{S_\alpha\}$ $(\alpha\in K)$ normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die $(r+m)$ Elemente $E, S_{\omega^j\alpha}$ $(j=0,\dots,m-1\,;\alpha\neq 0)$ und T^iS_α $(\alpha\in K;$ $i\neq 0)$ stellen die konjugierten Elemente von $\mathfrak{G}$ dar.

Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist unser Normalteiler $\mathfrak{S}$, wie leicht zu sehen ist. Daher sind die einfachen Charaktere ersten Grades von $\mathfrak{G}$ die folgenden:

$$\chi_\mu(T^iS_\alpha)=\zeta_m^{\mu i}\,; \quad \mu=0,1,\dots,m-1\,; \quad \zeta_m=e^{\frac{2\pi i}{m}}. \tag{1}$$

Da $\mathfrak{G}$ metabelsch ist, so ist jeder der r einfachen Charaktere nicht-ersten Grades von $\mathfrak{G}$ der von einem abelschen Charaktere eines Normalteilers $\mathfrak{N}\supset\mathfrak{S}$ induzierte Charakter.[1] Also ist der Grad eines solchen Charakters $g_i\leqq m=(\mathfrak{G}:\mathfrak{S})$, $(i=1,\dots,r)$. Aus der bekannten Formel

$$(\mathfrak{G}:E)=mp^n=m\cdot 1^2+\sum_{i=1}^{r}g_i^2\,, \quad \text{d. h.} \quad m^2r=\sum_{i=1}^{r}g_i^2\,,$$

ergibt sich somit $g_i=m\,(i=1,\dots,r)$, folglich $\mathfrak{N}=\mathfrak{S}$.

Es sei nun ψ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{S}$, der vom Hauptcharakter ψ_0 verschieden ist. Dann ist $\psi_\lambda(S_\alpha)=\psi(S_{\lambda\alpha})$ $(\lambda\in K, \lambda\neq 0)$ auch ein einfecher Charakter von $\mathfrak{S}$; durchläuft λ die Elemente $(\neq 0)$ aus K, so durchläuft ψ_λ die einfachen Charaktere $(\neq\psi_0)$ von $\mathfrak{S}$. Wegen $\mathfrak{G}=\mathfrak{S}+\mathfrak{S}T+\cdots\mathfrak{S}T^{m-1}$ ist der von ψ induzierte Charakter

$$\chi_\psi(P)=\begin{cases} m & \text{für} \quad P=E\,, \\ \sum_{i=1}^{m-1}\psi(S_{\omega^i\alpha}) & \text{für} \quad P=S_\alpha\,, \\ 0\,, & \text{sonst.}\end{cases} \tag{2}$$

---

1) Z. Suetuna: Ueber die L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern, Japan. Jour. Math. **13**, (1936), 27–38; Satz 2.

Dass er für $\psi \neq \psi_0$ einfach ist, folgt aus

$$\sum_{P\in\mathfrak{G}} \chi_\psi(P)\cdot\chi_\psi(P^{-1}) = \sum_{a\in K}\sum_{i,j=0}^{m-1} \psi(S_{a(\omega^i-\omega^j)}) = mp^n + \sum_{i\neq j}\sum_{a\in K}\psi_{\omega^i-\omega^j}(S_a) = mp^n.$$

Dabei ist nach (2) $\chi_\psi = \chi_{\psi_{\omega^i}}$ $(i=0, \ldots, m-1)$. Da χ_ψ r verschiedene Charaktere χ_{ψ_i} $(i=1, \ldots, r)$ enthält, ist $\chi_{\psi'} \neq \chi_\psi$, falls $\psi' \neq \psi_{\omega^i}$ für irgendein i. Nach (1) und (2) erhalten wir deshalb alle $(m+r)$ einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$.

2. Es sei χ_{φ_0} der vom Hauptcharakter φ_0 von $\mathfrak{T}=\{T\}$ induzierte Charakter von $\mathfrak{G}$. Alsdann gilt

$$\chi_{\varphi_0} = \chi_0 + \chi_{\psi_1} + \cdots + \chi_{\psi_r}, \tag{3}$$

wie leicht nachzuweisen ist.

Nunmehr sei k^* ein Zahlkörper p^n-ten Grades über einem algebraischen Zahlkörper k und Ω der zu k^* gehörige galoissche Körper über k. Ferner sei $\mathfrak{G}$ eben die Gruppe von Ω/k, und $\mathfrak{T}$ die zu k^* gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ω_0 sei der zu $\mathfrak{S}$ gehörige Unterkörper von Ω. Dann ist wegen (3) nach der bekannten Artinschen Formel

$$L(s, \chi_{\varphi_0}; \Omega/k) = L(s, \chi_0; \Omega/k)\cdot\prod_{i=1}^{r} L(s, \chi_{\psi_i}; \Omega/k),$$

d. h.

$$\zeta_{k^*}(s) = \zeta_k(s)\cdot\prod_{i=1}^{r} L(s, \psi_i; \Omega/\Omega_0).$$

Dies ist die Verschärfung eines bekannten Artinschen Resultates.[1]

3. Nun betrachten wir lineare Kongruenzgruppen mod. p^n, wobei p eine ungerade Primzahl bedeutet. Zunächst sei $\mathfrak{G}=\{P\}$ die volle lineare Gruppe:

$$Px \equiv ax + b \pmod{p^n},$$

wobei a, b ganz rational, $(a, p)=1$. Wird $Sx \equiv x+1 \pmod{p^n}$, $Tx = \omega x \pmod{p^n}$ gesetzt, wo ω eine primitive Wurzel mod. p^n bedeutet, ist $S^{p^n}=E$, $T^{p^{n-1}(p-1)}=E$, $T^{-1}ST=S^\omega$; also ist $\mathfrak{S}=\{S\}$ gerade die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$, wie leicht zu sehen ist. Daher sind die einfachen Charaktere ersten Grades von $\mathfrak{G}$ die folgenden:

$$\chi_\mu^{(0)}(T^\alpha S^\beta) = \zeta_{l_n}^{\mu\alpha}; \quad \mu=0, \ldots, l_n-1, \quad \zeta_{l_n} = e^{\frac{2\pi i}{l_n}}, \tag{4}$$

mit $l_m = p^{m-1}(p-1)$.

Es sei $\mathfrak{S}_m = \{S, T^{l_m}\}$ $(m=1, \ldots, n)$, dann ist die Kommutatorgruppe von S_m gleich $\{S^{p^m}\}$; und die abelschen Charaktere von $\mathfrak{S}_m$ sind

$$\psi_\nu^\mu(S) = \zeta_{p^m}^\mu, \quad \psi_\nu^\mu(T^{l_m}) = \zeta_{p^{n-m}}^\nu, \quad \begin{pmatrix}\mu=0, \ldots, p^m-1 \\ \nu=0, \ldots, p^{n-m}-1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

1) E. Artin: Ueber die Zetafunktion gewisser algebraischer Zahlkörper, Math. Ann., **89**, (1923), 147–156; Formel (4).

Die von ψ_ν^μ induzierte Charakter von $\mathfrak{G}$ ist für $(\mu, p)=1$ gleich

$$(6)\qquad \chi_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}(P)=\begin{cases} p^{m-1}(p-1)\,\zeta_{p^{n-m}}^{a\nu} & \text{für}\quad P=T^{alm}S^\beta, \quad p^m \mid \beta, \\ -p^{m-1}\zeta_{p^{n-m}}^{a\nu} & \text{für}\quad P=T^{alm}S^\beta, \quad p^{m-1}\parallel \beta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die p^{n-m} verschiedenen $\chi_{\psi_\nu^1}^{(m)}(\nu=0, \dots, p^{n-m}-1)$ sind einfach, und die nach (5), (6) gewonnen $\left(p^{n-1}(p-1)+\sum_{m=1}^{n} p^{n-m}\right)$ einfachen Charaktere bilden das vollständige System, da

$$(\mathfrak{G}:E)=p^{2n-1}(p-1)=p^{n-1}(p-1)\cdot 1^2+\sum_{m=1}^{n} p^{n-m}\left(p^{m-1}(p-1)\right)^2$$

ist.

Nun sei $\mathfrak{G}^{(q)}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G}^{(q)}=\{S, T_0\}, \quad T_0=T^r, \quad rq=p^{n-1}(p-1).$$

Es sei zunächst $q=p^s q_0$, $(q_0, p)=1$, $r=p^{n-s-1}r_0$, $r_0 q_0=p-1$, mit $q_0>1$. Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}^{(q)}$ ist gleich $\{S\}$, also sind die einfachen Charaktere ersten Grades von $\mathfrak{G}^{(q)}$

$$(7)\qquad \overline{\chi}_\mu^{(0)}(S^\alpha T_0^\beta)=\zeta_q^{\beta\mu} \qquad (\mu=0, \dots, q-1).$$

Der von einem Charakter ψ_ν^μ der Gruppe $\mathfrak{S}_m=\{S, T_0^{p^{m+s-n}q_0}\}$ $(m= n-s+1, \dots, n)$ (bei (4)) induzierte Charakter von $\mathfrak{G}^{(q)}$ ist

$$(8)\qquad \overline{\chi}_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}(P)=\begin{cases} p^{m+s-n}q_0 & \text{für}\quad P=E, \\ \zeta_{p^{n-m}}^{a\nu}\Big(\sum_{\gamma=0}^{p^{m+s-n}q_0-1} \zeta_{p^m}^{\mu\beta\omega_1^\gamma}\Big) & \text{für}\quad P=T^{ap^{m+s-n}q_0}S^\beta(\omega_1=\omega^r), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Einfachheit von $\overline{\chi}_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}$ für $(\mu, p)=1$ folgt aus der von $\chi_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}=\chi_{\overline{\chi}_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}}$, und für jedes ν sind die $(\mathfrak{G}:\mathfrak{G}^{(q)})=r$ Charaktere $\overline{\chi}_{\psi_\nu^{\mu_1}}^{(m)}, \dots, \overline{\chi}_{\psi_\nu^{\mu_r}}^{(m)}$ von einander verschieden, denn $\chi_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}$ von $\mathfrak{G}$ ist in $\mathfrak{S}_m$ die Summe von $(\mathfrak{G}:\mathfrak{S}_m)$ verschiedenen Charakteren von $\mathfrak{S}_m$. Die übrigen einfachen Charaktere $\overline{\chi}$ von $\mathfrak{G}^{(q)}$ ergeben sich durch Zerfällung von $\chi_{\psi_\nu^1}^{(m)}$ $(m=1, \dots, n-s)$. Wegen

$$\sum_{P\in\mathfrak{G}^{(q)}} \chi_{\psi_\nu^1}^{(m)}(P)\cdot{}_{\psi_\nu^1}^{(m)}(P^{-1})=p^{m-1}r_0\cdot p^{n+s}q_0$$

zerfällt $\chi_{\psi_\nu^1}^{(m)}$ in $\mathfrak{G}^{(q)}$ in $p^{m-1}r_0$ einfache Charaktere, deren Grad gleich q_0 ist $(r_0 q_0=p-1)$.[1] Dabei bedeutet q_0 den Index $(\mathfrak{G}^{(q)}:\mathfrak{S}_{n-s})$. Die Anzahl unserer Charaktere $\overline{\chi}$ sei nun t. Dann ist

$$(\mathfrak{G}^{(q)}:E)=p^{n+s}q_0=q\cdot 1^2+\sum_{m=n-s+1}^{n} p^{n-m}r(q_0 p^{m+s-n})^2+t\cdot q_0^2,$$

1) S. Suetuna: loc. cit.

folglich $t=p^s(p^{n-s}-1)\cdot q_0^{-1}$. Da $\overline{\chi}^{(n-s)}_{\psi_0^{\nu}}$ nicht einfach ist, müssen die übrigen Charaktere $\overline{\chi}^{(n-s)}_{\psi_\nu^{\mu}}$ ($\mu=1, \dots, p^{n-s}-1$; $\nu=0, \dots, p^s-1$) einfach sein; und darunter gibt es genau t verschiedene, nämlich

$$\text{(9)} \qquad \overline{\chi}^{(n-s)}_{\psi_\nu^{\mu_1}}, \dots, \overline{\chi}^{(n-s)}_{\psi_\nu^{\mu_v}}, \qquad \left(\nu=1, \dots, p^s-1;\, v=(p^{n-s}-1)\cdot q_0^{-1}\right).$$

Somit sind alle $\left(q+\sum_{m=n-s+1}^{n} p^{n-m}r+p^s(p^{n-s}-1)\cdot q_0^{-1}\right)$ einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}^{(q)}$ nach (7), (8) und (9) erhalten.

Für den Fall $q_0=1$ ist die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}^{(q)}$ gleich $\{S^{p^{n-s}}\}$, und die einfachen Charaktere ersten Grades von $\mathfrak{G}^{(q)}$ sind

$$\text{(10)} \qquad \overline{\chi}^{(0)}_{\mu,\nu}(S^\alpha T_0^\beta)=\zeta^{\alpha\mu}_{p^{n-s}}\cdot\zeta^{\beta\nu}_{p^s} \quad \begin{pmatrix}\mu=0, \dots, p^{n-s}-1\\ \nu=0, \dots, p^s-1\end{pmatrix},$$

welche mit $\overline{\chi}^{(m)}_{\psi_\nu^{\mu_1}}, \dots, \overline{\chi}^{(m)}_{\psi_\nu^{\mu_r}}$ ($m=n-s+1, \dots, n$; $\nu=1, \dots, p^{n-m}-1$) zusammen das vollständige System bilden.

4. Nunmehr sei φ_0 der Hauptcharakter von $\{T_0\}=\{T^r\}$. Dann lautet der von φ_0 induzierte Charakter $\overline{\chi}_{\varphi_0}$ von $\mathfrak{G}^{(q)}$

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \overline{\chi}_{\varphi_0}=\overline{\chi}^{(0)}_0+\sum_{i=1}^{v}\overline{\chi}^{(n-s)}_{\psi_0^{\mu_i}}+\sum_{m=n-s+1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\overline{\chi}^{(m)}_{\psi_0^{\mu_i}}, & \text{falls } q_0>1,\\ \overline{\chi}_{\varphi_0}=\sum_{\mu=0}^{p^{n-s}-1}\overline{\chi}^{(0)}_{\mu,0}+\sum_{m=n-s+1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\overline{\chi}^{(m)}_{\psi_0^{\mu_i}}, & \text{falls } q_0=1,\end{cases}$$

wie leicht nachzuweisen ist.

k sei ein algebraischer Zahlkörper, $\Omega=k(\sqrt[p^n]{a}, \zeta_{p^n})$ der zu $k(\sqrt[p^n]{a})$ $(a\in k)$ gehörige galoissche Körper über k. Ferner sei $\mathfrak{G}^{(q)}$ die Gruppe von Ω/k. Da der zu $\mathfrak{S}_m$ bzw. $\mathfrak{S}^s_m=\{S^{p^s}, T_0^{p^{m+s-n}q_0}\}$ gegörige Unterkörper von Ω $k(\zeta_{p^m})$ bzw. $k(\zeta_{p^m}, \sqrt[p^s]{a})$ ist, ergibt sich aus (11) nach der bekannten Formel von Artin[1)]

$$\text{(12)} \qquad D\left(k(\sqrt[p^n]{a})/k\right)=\Bigg\{\prod_{m=n-s+1}^{n} D\left(k(\zeta_{p^m})/k\right)\cdot$$
$$\prod_{m=n-s+1}^{n}\mathfrak{f}^{p^{m+s-n}q_0}\left(k(\zeta'_{p^m}, \sqrt[p^m]{a})/k(\zeta_{p^m})\right)\Bigg\}^r\cdot D^v\left(k(\zeta_{p^{n-s}})/k\right)\cdot$$
$$\prod_{m=1}^{n-s}\mathfrak{f}^{p^{m-1}(p-1)}\left(k(\zeta_{p^{n-s}}, \sqrt[p^m]{a})/k(\zeta_{p^{n-s}})\right),$$

wo D bzw. $\mathfrak{f}$ üblicherweise die Diskriminante bzw. den Führer bedeutet.

5. Zum Schluss sei $\mathfrak{G}_k$ die volle lineare Gruppe mod. k, $k=2^e\cdot\prod_{i=1}^{g}p_i^{e_i}$. Um alle einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}_k$ aufzustellen, kommt es nur auf die einfachen Charaktere von Gruppen $\mathfrak{G}_{2^e}$, $\mathfrak{G}_{p_i^{e_i}}$ an, weil bekanntlich

1) E. Artin: Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper, Crelle, **164**, (1931), 1–11; Formel (19).

$\mathfrak{G}_k \cong \mathfrak{G}_{2^e} \times \mathfrak{G}_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{p_g^{e_g}}$ ist. Da in 3. der Fall $\mathfrak{G}_{p_i^{e_i}}$ $(p_i \neq 2)$ erledigt ist, so bleibt nur noch der Fall $\mathfrak{G}_{2^e}$ übrig.

Falls $e=1$ oder 2 ist, so ist alles ganz trivial. Wird also $e \geqq 3$ gesetzt, so sei $Sx \equiv x+1 \pmod{2^e}$, $Tx \equiv 5x \pmod{2^e}$, $Vx \equiv -x \pmod{2^e}$. Dann ist $S^{2^e}=E$, $T^{2^{e-2}}=E$, $V^2=E$, $VT=TV$, $T^{-1}ST=S^5$, und $V^{-1}SV=S^{-1}$. Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}_{2^e}$ ist $\{S^2\}$, also sind die einfachen Charaktere ersten Grades von $\mathfrak{G}_{2^e}$

$$\chi_{\lambda,\mu,\nu}(T^\alpha V^\beta S^\gamma) = (-1)^{\mu\beta+\nu\gamma} \cdot \zeta_{2^{e-2}}^{\lambda\alpha} (\lambda=0, \dots, 2^{e-2}-1; \mu, \nu=0,1). \tag{13}$$

Die abelschen Charaktere ψ_ν^μ von $\mathfrak{S}_m = \{S, T^{2^m}\}$ $(m=0, \dots, e-2)$, deren Kommutatorgruppe $\{S^{2^{m+2}}\}$ ist, seien

$$\psi_\nu^\mu(S^\alpha T^{\beta 2^m}) = \zeta_{2^{m+2}}^{\alpha\mu} \cdot \zeta_{2^{e-m-2}}^{\beta\nu} (\mu=0, \dots, 2^e-1; \nu=0, \dots, 2^{e-m-2}-1).$$

Der von ψ_ν^μ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ induzierte Charakter ist für $(\mu, 2)=1$

$$\chi_{\psi_\nu^\mu}^{(m)}(P) = \begin{cases} 2^{m+1}\zeta_{2^{e-m-2}}^{\nu\alpha} & \text{für } P=T^{\alpha\cdot 2^m}S^\beta, \quad 2^{m+2}\,|\,\beta, \\ -2^{m+1}\zeta_{2^{e-m-2}}^{\nu\alpha} & \text{für } P=T^{\alpha\cdot 2^m}S^\beta, \quad 2^{m+1}\,\|\,\beta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{14}$$

Dieser Charakter ist einfach und die nach (13), (14) gewonnenen $2^e + \sum_{m=0}^{e-2} 2^{e-m-2}$ einfachen Charaktere bilden das vollständige System, wie leicht zu sehen ist.

Der vom Hauptcharakter φ_0 von $\{T, V\}$ induzierte Charakter von $\mathfrak{G}_{2^e}$ ist.

$$\chi_{\varphi_0} = \chi_{0,0,0} + \chi_{0,0,1} + \sum_{m=0}^{e-2} \chi_{\varphi_0^1}^{(m)}. \tag{15}$$

Ähnlich wie bei (12) ergibt sich ohne besondere Schwierigkeiten aus (11) und (15)

$$D\big(P(\sqrt[k]{a})/P\big) = \prod_{m|k} D\big(P(\zeta_m)/P\big) \cdot \prod_{m|k} \mathfrak{f}^{\varphi(m)}\big(P(\zeta_m, \sqrt[m]{a})/P(\zeta_m)\big), \tag{16}$$

wo P der rationale Kärper, $\big(P(\sqrt[k]{a}):P\big)=k$ ist. Dabei ist a nicht mit k teilerverwandt, d. h. es gibt mindestens einen Primfaktor von a, der in k nicht aufgeht. Die Diskriminantenformeln (12) und (16) sind natürlich Verallgemeinerungen der Hasseschen Formeln.[1)]

1) H. Hasse: Ueber die Diskriminante auflösbarer Körper von Primzahlgrad, Crelle, **176**, (1936), 12–17; Formel (3).