# PAPERS COMMUNICATED

## 19. *Sur un problème concernant les transformations des polyèdres en surfaces sphériques.*

Par Ryoji SAKATA.

L'Institut Mathématique, L'Université Impériale d'Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 13, 1939.)

Dans son travail *Sur les transformations des polyèdres acycliques en surfaces sphériques,*[1] M. K. Borsuk a posé le problème suivant:

*Le polyèdre qui n'admet de transformation essentielle en aucune surface sphérique est-il acyclique en toutes les dimensions?*[2]

Le but de cette note est de démontrer que la réponse au problème de M. K. Borsuk est affirmative.[3]

Soit d'abord $P$ un polyèdre de dimension $n$ (avec décomposition simpliciale fixe $K^n$). La thèse est évidemment vraie pour $n=0$; dans le cas où $n=1$, elle résulte du théorème, d'après lequel un polyèdre de dimension arbitraire peut être transformé essentiellement sur $S^1$ et ne peut l'être que si son premier nombre de Betti est non nul.

Désignons maintenant par $\bar{K}^r$ l'ensemble de tous les simplexes de $K^n$ de dimensions $\leqq r$. On dira qu'une transformation de $\bar{K}^r$ en $S^r$ est normale, si elle possède une extension à $\bar{K}^{r+1}$. On trouve, en vertu du théorème de M. H. Hopf,[4] que $P$ est acyclique en dimension $r$ lorsque chaque transformation normale de $\bar{K}^r$ en $S^r$ est inessentielle. On voit aussitôt que dans le cas où $r=n$ $P$ est acyclique en dimension $n$, car chaque transformation est alors normale. D'une façon plus générale, on n'a qu'à tenir compte du fait que, *$P$ étant un polyèdre de dimension $n$, dont les groupes de Betti de dimensions $>r+1$ disparaissent, toute transformation normale de $\bar{K}^r$ en $S^r$ admet un prolongement continu sur $P$ tout entier.*[5] Dans le cas où $r=n-1$, c'est une conséquence immédiate du résultat bien connu de M. H. Hopf, d'après lequel toute transformation normale de $\bar{K}^{n-1}$ en $S^{n-1}$ se laisse étendre sur $P$ tout entier. Or, chaque transformation ainsi obtenue est par hypothèse inessentielle. Il en résulte que $P$ est acyclique en toutes les dimensions, ce qui achève la démonstration.

---

1) Fund. Math. **28** (1937), 203–210.

2) Un polyèdre $P$ est dit acyclique en dimension $r$, lorsque chaque cycle $r$-dimensionnel de $P$ (aux coefficients arbitraires) est homologue à 0 dans $P$.

3) On constate sans peine que la thèse reste aussi vraie pour les espaces métriques compacts.

4) Voir à ce sujet H. Hopf, Eine Charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen, Comp. Math. **5** (1938), 347–353.

5) Ce résultat été établi récement par M. A. Komatu.

En vertu du théorème de M. K. Borsuk,[1] ceci peut s'énoncer aussi de la façon suivante:

*Théorème. P étant un polyèdre de dimension n, pour que chaque transformation de P en une surface sphérique soit inessentielle, il faut et il suffit que les nombres de Betti* $p^r(K^n)$ *ainsi que les groupes de torsion* $T^r(K^n)$ *disparaissent pour tout* $r=0, 1, \ldots, n$.

1) Cf. K. Borsuk, l. c., p. 203. En m'appuyant sur la théorie de la $\nabla$-homologie, sous la forme que lui a donnée M. L. Pontrjagin, j'ai réussi à trouver une simple démonstration de ce théorème. Je la présentrai avec le résultat de M. A. Komatu cidessus dans un autre travail.