34. Über die Eindeutigkeit der Artinschen L-Funktionen.

Von Hideo ARAMATA.
Daiichi Kotogakko, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1939.)

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper und K ein galoissche Erweiterung von k. In der vorliegenden Note denken wir uns den Fall, dass die Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k die sogen. Kongruenzgruppe von der Primzahlstufe p ist.[1] Die Charaktere dieser Gruppe $\mathfrak{G}$ hat schon Frobenius hergeleitet,[2] so dass wir uns im folgenden der Frobeniusschen Bezeichungen bedienen.

1) Der durch einen abelschen Charakter ψ_i^τ von der durch ein Element τ aus $\mathfrak{G}$ erzeugten Untergruppe induzierte Charakter von $\mathfrak{G}$ hat bekantlich die Gestalt:

$$\chi_{\psi_i^\tau}(\rho)=\frac{g}{q_\tau n_\rho}\sum{}' \psi_i(\tau^a)\,,$$

wobei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, q_τ dieselbe von τ, und n_ρ die Anzahl der zu ρ konjugieten Elemente aus $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Die Summe erstrekt dabei über solche a, dass τ^a in der ρ-Klasse, d. h. derjenigen Klasse von $\mathfrak{G}$, die ρ enthält, auftreten.

2) Für die Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}$ von der Primzahlstufe p gelten:

$$g=\frac{1}{2}p(p^2-1)\,,\quad q_P=q_Q=p\,,\qquad q_R=\frac{1}{2}(p-1)\,,$$

$$q_S=\frac{1}{2}(p+1)\,,\quad n_P=n_Q=\frac{p^2-1}{2}\,,\quad n_R=\frac{p(p+1)}{2}\,,$$

$$n_S=\frac{p(p+1)}{2}\,.$$

3) Wenn a ein quadratischer Rest mod p und b ein Nichtrest mod p ist, so ist P^a zu P konjugiert; ebenso Q^a zu Q konjugiert.

4) Unter den Potenzen von R sind je zwei mit entgegengesetzten Exponenten R^a und R^{-a} (und nur diese) konjugiert; ebenso unter den Potenzen von S.

Aus 4) ergibt sich sofort

$$\text{(1)}\qquad \chi_{\psi_i^R}(\rho)=\chi_{\bar{\psi}_i^R}(\rho)\,,\quad \chi_{\psi_i^S}(\rho)=\chi_{\bar{\psi}_i^S}(\rho)\,,\quad \text{wenn}\quad \bar{\psi}_i=\psi_i^{-1}\quad \text{ist.}$$

Aus 1), 2) und 4) ergibt sich ferner

1) Vgl. E. Artin, „Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Math. Annalen **89** (1923), 147-156.

2) G. Frobenius, „Über Gruppencharaktere," Berliner Sitzungsberichte, 1896, 985-1021.

$$(2)\quad \begin{cases} \chi_{\psi_i^R}(\rho)=\begin{cases} p(p-1) & \text{für } \rho=1\,,\\ \psi_i(R^a)+\psi_i(R^{-a}) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } R^a\text{-Klasse } \left(0<a<\frac{p-1}{2}\right),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\\ \chi_{\psi_i^S}(\rho)=\begin{cases} p(p+1) & \text{für } \rho=1\,,\\ \psi_i(S^a)+\psi_i(S^{-a}) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } S^a\text{-Klasse } \left(0<a<\frac{p+1}{2}\right),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_{i=2}^{\frac{1}{2}(p-1)}\chi_{\psi_i^R}(\rho)=\begin{cases} \frac{1}{2}p(p^2-1)-p(p-1) & \text{für } \rho=1\,,\\ -2 & \text{für } \rho \text{ aus der } R^a\text{-Klasse } \left(0<a<\frac{p-1}{2}\right),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\\ \sum_{i=2}^{\frac{1}{2}(p+1)}\chi_{\psi_i^S}(\rho)=\begin{cases} \frac{1}{2}p(p^2-1)-p(p+1) & \text{für } \rho=1\,,\\ -2 & \text{für } \rho \text{ aus der } S^a\text{-Klasse } \left(0<a<\frac{p+1}{2}\right),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{cases}$$

Weil $\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\chi_{\psi_i^R}(\rho)$ und $\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(p+1)}\chi_{\psi_i^S}(\rho)$ der reguläre Charakter von $\mathfrak{G}$ sind, folgt (3) sofort aus (2).

$$(4)\quad \chi_{\psi_i^P}(\rho)=\begin{cases} \frac{1}{2}(p^2-1) & \text{für } \rho=1\,,\\ \sum_a{}' \psi_i(P^a) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } P\text{-Klasse},\\ \sum_b{}' \psi_i(P^b) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } Q\text{-Klasse},\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei a bzw. b quadratische Reste bzw. Nichtreste mod p durchläuft.

Mittels der Formeln (1)–(4) stellen wir einfache Charaktere χ von $\mathfrak{G}$ als lineare Kombinationen von der Form $\chi_{\psi_i^T}$ folgendermassen dar:

Der zweite Charakter in der Frobeniusschen Tabelle, S. 1021, ist tatsächlich gleich

$$(5)\quad -\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=2}^{\frac{1}{2}(p-1)}\chi_{\psi_i^R}(\rho)-\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(p+1)}\chi_{\psi_i^S}(\rho)\right\}.$$

Nach (1) is dies gleich

$$-\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-1}\chi_{\psi_i^R}(\rho)+\sum_{i=2}^{\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}\chi_{\psi_i^S}(\rho)-\frac{\varepsilon}{2}\chi_{\psi\left\{\substack{R\\S}\right\}}(\rho)\,,$$

wobei $\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right\}=\begin{cases}R \text{ für } p\equiv 1 \pmod 4,\\ S \text{ für } p\equiv 3 \pmod 4,\end{cases}$ $\underline{\psi}\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right\}=-1.$

Zwei Charaktere an der dritten Stellen sind gleich

$$\chi_{\psi_i^P}(\rho) - \frac{1}{2}\chi_{\psi\{{R \atop S}\}}(\rho), \quad \text{bzw.} \quad \chi_{\psi_{i'}^P}(\rho) - \frac{1}{2}\chi_{\underline{\psi}\{{R \atop S}\}}(\rho) \tag{6}$$

mit $\psi_{i'} = \psi_i^b$, wobei b ein quadratischer Nichtrest mod p ist.

$\left\{\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-1\right\}$ Charaktere an der vierten Stellen sind gleich

$$-\{\chi_{\psi_i^P}(\rho) + \chi_{\psi_{i'}^P}(\rho)\} + \chi_{\psi_a^R}(\rho) \qquad \left(a = 2, \ldots, \frac{1}{4}(p-\varepsilon)\right), \tag{7}$$

mit $\psi_a(R) = e^{\frac{2\pi i}{\frac{1}{2}(p-1)}(a-1)}$.

$\left\{\frac{1}{4}(p-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\right\}$ Charaktere an der fünften Stellen sind gleich

$$\chi_{\psi_i^P}(\rho) + \chi_{\psi_{i'}^P}(\rho) - \chi_{\psi_b^S}(\rho) \qquad \left(b = 2, \ldots, \frac{1}{4}(p-\varepsilon) + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\right), \tag{8}$$

mit $\psi_b(S) = e^{\frac{2\pi i}{\frac{1}{2}(p+1)}(b-1)}$.

Aus (5)–(8) lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{i=2}^{h} f_i \chi_i(\rho) = \chi_{\psi_i^P}(\rho) + \chi_{\psi_{i'}^P}(\rho) + \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-1} \chi_{\psi_i^R}(\rho) + \sum_{i=2}^{\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-\frac{1}{2}(p-\varepsilon)} \chi_{\psi_i^S}(\rho) + \frac{1}{2}\chi_{\underline{\psi}\{{R \atop S}\}}(\rho),$$

wo f_i den Grad von χ_i und h die Anzahl der Klassen von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Bekanntlich ist $h = \frac{1}{2}(p-1)+3$.

Weil die Artinschen L-Funktionen in abelschen Fällen alle eindeutig sind und weil auch der Quotient $\zeta_K(s) : \zeta_k(s)$ eindeutig ist,[1] so ergibt sich aus dieser Identität, dass

$$\sqrt{L(s, \chi_{\underline{\psi}\{{R \atop S}\}}; K/k)}$$

eine eindeutige Funktion ist.

Nach (5)–(8) sind deshalb die sämtlichen $L(s, \chi; K/k)$ mit einfachen Charakteren χ als Produkt oder Quotient eindeutiger Funktionen darstellbar, womit unsere Behauptung erledigt ist.

---

1) H. Aramata, „Über die Teilbarkeit der Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Proc. 7 (1931), 334–336.