64. Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome.

Von Tikao TATUZAWA.
Fourth Higher School, Kanazawa.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1939.)

In der vorliegenden Note werde ich als Verschärfung eines bekannten Satzes von *Pólya*[1] über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome u. a. beweisen den folgenden

Satz 1. Nimmt ein ganzzahliges Polynom $P(x)$ vom Grade n an n voneinander verschiedenen ganzzahligen Stellen Werte an, die sämtlich von 0 verschieden und absolut genommen kleiner als $\sqrt{2^{-n}(n-1)!}$ sind, so ist $P(x)$ irreduzibel (im rationalen Zahlkörper).

Zunächst seien k, t ganz, $k \geqq t \geqq 1$, und $x_1, \dots, x_{k+1}$ seien von einander verschiedene Zahlen. Man nehme aus diesen $(k+1)$ Zahlen ganz beliebig ein System von $(t+1)$ Zahlen $x'_1, \dots, x'_{t+1}$ aus und bilde die absoluten Beträge aller Differenzen $|x'_i - x'_j|$ $(i \neq j)$. Alsdann sei $\varphi(t)$ die untere Grenze von den $\operatorname{Max}|x'_i - x'_j|$ für alle solchen $\binom{k+1}{t+1}$ Systeme. Dann gilt

Satz 2. Ist $f(x) = a_0 x^k + \cdots + a_k$ ein Polynom vom Grade k, so ist

$$\operatorname*{Max}_{i \leq k+1} |f(x_i)| \geqq |a_0| \; 2^{-k} \varphi(k) \varphi(k-1) \cdots \varphi(1).$$

Beweis. Ist $k=1$, so ist dies klar. Um also die vollständige Induktion anzuwenden, nehmen wir an, dass dieser Satz bis für $k-1$ richtig ist. Alsdann sei ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\varphi(k) = \operatorname*{Max}_{i,j \leq k+1} |x_i - x_j| = |x_1 - x_{k+1}|.$$

Wenn man nun

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_k) + g(x) \\ &= a_0 (x-x_2)(x-x_3) \cdots (x-x_{k+1}) + h(x) \end{aligned}$$

schreibt, so ist der erste Koeffizient von $g(x)$ bzw. $h(x)$ gleich

$$b_0 = a_1 + a_0(x_1 + \cdots + x_k) \text{ bzw. } c_0 = a_1 + a_0(x_2 + \cdots + x_{k+1}).$$

Folglich ist $|b_0 - c_0| = |a_0| \, \varphi(k)$, also $\operatorname{Max}(|b_0|, |c_0|) \geqq |a_0| \dfrac{\varphi(k)}{2}$. Wagen unserer Annahme ist also entweder

$$\operatorname*{Max}_{i<k} |g(x_i)| = \operatorname*{Max}_{i \leq k} |f(x_i)|, \text{ oder } \operatorname*{Max}_{2 \leq i \leq k+1} |h(x_i)| = \operatorname*{Max}_{2 \leq i \leq k+1} |f(x_i)|$$

grösser als $|a_0| \dfrac{\varphi(k)}{2} \, 2^{-k+1} \varphi(k-1) \cdots \varphi(1)$, w. z. b. w.

---

1) Vgl. etwa *G. Polya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis **2**, Berlin (1925), S. 136. (Prob. 118).

Satz 3. Sind $x_1, \dots, x_n$ $(n>k)$ voneinander verschiedene ganze rationale Zahlen, so gilt für das Polynom $f(x)$ im Satz 2

$$\underset{i\leq n}{\operatorname{Max}} |f(x_i)| \geqq |a_0|\, 2^{-k} (n-1)!^{\frac{k}{n}}$$

Beweis. Für $\alpha \geqq 1$ sei $[\alpha]$ wie üblich die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha$, und für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ sei $[\alpha]$ stets gleich 1. Ferner seien $x_1, \dots, x_n$ der Grösse nach angeordnet. Man setz

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_{1+[\frac{n-1}{k}]}, \quad x_3' = x_{1+[\frac{2n-1}{k}]}, \quad \dots, \quad x_{k+1}' = x_{1+[\frac{kn-1}{k}]}.$$

Dann ist für diese x' $\varphi(i) \geqq \left[\frac{in-1}{k}\right]$ für $1 \leqq i \leqq k$. Also ist nach Satz 2

$$M = \underset{i\leq n}{\operatorname{Max}} |f(x_i)| \geqq \underset{i\leq k+1}{\operatorname{Max}} |f(x_i')| \geqq |a_0|\, 2^{-k} \left[\frac{kn-1}{k}\right]$$
$$\left[\frac{(k-1)n-1}{k}\right] \dots \left[\frac{n-1}{k}\right];$$

folglich ist für jedes i zwischen 1 und n

$$M \geqq |a_0|\, 2^{-k} \left[\frac{kn-i}{k}\right]\left[\frac{(k-1)n-i}{k}\right] \dots \left[\frac{n-i}{k}\right].$$

Durch Multiplikation dieser n Ungleichungen ergibt sich unser Satz 3.

Beweis von Satz 1. Wäre nun $P(x)$ reduzibel, so wäre der Grad eines echten Faktors $f(x)$ von $P(x)$ (mit ganzzahligen Koeffizienten) $\geqq \frac{n}{2}$. Also würde nach Satz 3

$$\underset{i\leq n}{\operatorname{Max}} |P(x_i)| \geqq \underset{i\leq n}{\operatorname{Max}} |f(x_i)| \geqq 2^{-\frac{n}{2}} (n-1)!^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^{-n}(n-1)!}$$

sein, was ein Widerspruch ist.

Es ergibt sich auch sofort der folgende

Satz 4. Nimmt das Polynom $P(x)$ im Satz 1 an k von einander verschiedenen ganzzahligen Stellen, wobei $k > \frac{n}{2}$ ist, Werte an, die sämtlich von 0 verschieden und absolut genommen kleiner als $\frac{1}{2}(l-1)!^{\frac{1}{l}}$ mit $l = \left[\frac{n}{2}\right]$ sind, so ist $P(x)$ irreduzibel.

Beweis. Wäre $P(x)$ reduzibel, so wäre der Grad eines irreduziblen Faktors $f(x)$ von $P(x) \leqq \frac{n}{2}$; folglich nach Satz 3

$$\underset{i\leq k}{\operatorname{Max}} |P(x_i)| \geqq \underset{i\leq k}{\operatorname{Max}} |f(x_i)| \geqq 2^{-1}(k-1)!^{\frac{1}{k}} \geqq \frac{1}{2}(l-1)^{\frac{1}{l}}$$

gegen unsere Annahme.