73. Über Ringe mit Vielfachenkettensatz.

Von Keizô ASANO.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 13, 1939.)

In einem Schiefring $\mathfrak{o}$ mit dem Vielfachenkettensatz für Linksideale gilt,[1] dass

1. das maximale zweiseitige Nilideal[2] $\mathfrak{c}$ nilpotent ist,
2. der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ halbeinfach ist,
3. jeder Teilring von $\mathfrak{o}$, der aus lauter nilpotenten Elementen besteht, selbst nilpotent ist.

In § 1 der vorliegenden Note beweisen wir, dass unter der Voraussetzung des Vielfachenkettensatzes für zweiseitige Ideale und des Veilfachenkettensatzes für Linksideale modulo jedem Primideal auch der Satz gilt.[3] Im kommutativen Ring mit Nichtnullteilern ist bekannt,[4] dass der Teilerkettensatz für Ideale aus dem eingeschränkten Veilfachenkettensatz folgt. Wir beweisen in § 2, dass im Schiefring mit Nichtnullteilern der Teilerkettensatz für Linksideale aus dem Vielfachenkettensatz für Linksideale folgt.[5] Wir beweisen ferner in § 3, dass der Kettensatz für Linksideale und der Kettensatz für Rechtsideale unabhängig sind.

§ 1. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Schiefring und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ seien zweiseitige Ideale von $\mathfrak{o}$. Unter dem rechts- bzw. linksseitigen Idealquotienten $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r$ bzw. $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l$ verstehen wir die Gesamtheit der Elemente c von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{b}c \leqq \mathfrak{a}$ bzw. $c\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$. Der Idealquotient ist ersichtlich ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$ und es gilt

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r \geqq \mathfrak{a}\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l \geqq \mathfrak{a}\,,$$
$$\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r \leqq \mathfrak{a}\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}\,,$$
$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r = \big(\mathfrak{a}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\big)_r\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l = \big(\mathfrak{a}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\big)_l\,,$$
$$\big((\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r:\mathfrak{c}\big)_r = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})_r\,, \qquad \big((\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l:\mathfrak{c}\big)_l = (\mathfrak{a}:\mathfrak{c}\mathfrak{b})_l\,,$$
$$\text{Aus } \mathfrak{b} \geqq \mathfrak{c} \text{ folgt } (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r \leqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})_r\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l \leqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})_l\,.$$

Ein (von $\mathfrak{o}$ verschiedenes) zweiseitiges Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ heisst Primideal, wenn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}$ $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}$ folgt, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zweiseitige Ideale

---

1) C. Hopkins, Nilrings with minimal condition for admissible left ideals. Duke math. J. **4** (1939), S. 664-667.

2) D. h. aus lauter nilpotenten Elementen bestehendes Ideal.

3) Diesen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Y. Akizuki.

4) S. Mori, Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz. J. of science of Hiroshima Univ. **3**, S. 277-296. Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz. Proc. Physico-math. Soc. of Japan. **17** (1935), S. 337-345.

5) Im speziellen Fall folgt der Teilerkettensatz für Linksideale aus dem eingeschränkten Vielfachenkettensatz für Linksideale. Es ist aber dem Verfasser nicht gelungen zu entscheiden, ob dies im allgemeinen der Fall ist.

sind. Ein (von $\mathfrak{o}$ verschiedenes) zweiseitiges Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ heisst stark teilerlos, wenn der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein einfacher Ring ist. Jedes stark teilerlose Ideal ist Primideal und ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist, wie leicht gezeigt wird, dann und nur dann stark teilerlos, wenn die $\mathfrak{p}$ enthaltenden Linksideale von $\mathfrak{o}$ die Minimaleigenschaft besitzen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein Schiefring, in welchem der Vielfachenkettensatz für zweiseitige Ideale gilt und jedes Primideal stark teilerlos ist.*[1] *Dann ist jeder Teilnilriny von $\mathfrak{o}$ nilpotent. Insbesondere ist das maximale zweiseitige Nilideal (d. h. die Vereinigungsmenge aller zweiseitigen Nilideale) $\mathfrak{c}$ nilpotent und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist halbeinfach.*

Hilfssatz. $\mathfrak{o}$ sei ein Schiefring im Satz 1 und $\mathfrak{n}$ sei ein von Null verschiedenes, zweiseitiges Nilideal von $\mathfrak{o}$. Dann ist $\mathfrak{n}^2 \neq \mathfrak{n}$.

Beweis. Wir nehmen jetzt an, es sei $\mathfrak{n}^2=\mathfrak{n}$. Es ist $(0:\mathfrak{n})_l \neq \mathfrak{o}$; denn aus $(0:\mathfrak{n})_l=\mathfrak{o}$ folgt $\mathfrak{n}^2 \leqq \mathfrak{o}\mathfrak{n}=0$. Bedeutet $\mathfrak{m}$ ein minimales zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{m} \supset (0:\mathfrak{n})_l$ $\big(\mathfrak{m} \neq (0:\mathfrak{n})_l\big)$, so ist $\mathfrak{m}\mathfrak{o} \not\equiv 0$ $\big((0:\mathfrak{n})_l\big)$; denn sonst ist

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\mathfrak{n}^2 \leqq \mathfrak{m}\mathfrak{o}\mathfrak{n} \leqq (0:\mathfrak{n})_l\mathfrak{n}=0\,, \qquad \mathfrak{m} \leqq (0:\mathfrak{n})_l\,.$$

$\mathfrak{p}=\big((0:\mathfrak{n})_l:\mathfrak{m}\big)_r$ ist also von $\mathfrak{o}$ verschieden und es ist $\big((0:\mathfrak{n})_l:\mathfrak{p}\big)_l \geqq \mathfrak{m} \supset (0:\mathfrak{n})_l$. $\mathfrak{p}$ ist ferner ein Primideal. Ist nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $\mathfrak{a}\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, d. h. $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leqq (0:\mathfrak{n})_l$, $\mathfrak{m}\mathfrak{a} \not\leqq (0:\mathfrak{n})_l$, so ist $(0:\mathfrak{n})_l \subset \big(\mathfrak{m}\mathfrak{a}, (0:\mathfrak{n})_l\big) \leqq \mathfrak{m}$, also $\big(\mathfrak{m}\mathfrak{a}, (0:\mathfrak{n})_l\big)=\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{m}\mathfrak{b}=\big(\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{b}, (0:\mathfrak{n})_l\mathfrak{b}\big) \leqq (0:\mathfrak{n})_l$, d. h. $\mathfrak{b}\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. $(\mathfrak{n}, \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$ ist ein zweiseitiges Nilideal von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ und, da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ einfacher Ring ist, ist $\mathfrak{n}\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Es gilt daher

$$(0:\mathfrak{n})_l=(0:\mathfrak{n}^2)_l=\big((0:\mathfrak{n})_l:\mathfrak{n}\big)_l \geqq \big((0:\mathfrak{n})_l:\mathfrak{p}\big)_l \supset (0:\mathfrak{n})_l\,.$$

Es ergibt sich also ein Widerspruch. Damit ist $\mathfrak{n}^2 \neq \mathfrak{n}$.

Beweis des Satzes 1. Ist $\mathfrak{c}$ nicht nilpotent, so erhält man nach dem Hilfssatz eine unendliche Kette von zweiseitigen Idealen $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{c}^2 \supset \mathfrak{c}^4 \supset \cdots$; also ist $\mathfrak{c}$ nilpotent. $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ besitzt kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal. $\bar{\mathfrak{a}}_1$ sei ein von Null verschiedenes, minimales zweiseitiges Ideal von $\bar{\mathfrak{o}}$. Dann ist $\bar{\mathfrak{a}}_1\bar{\mathfrak{o}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}_1^2 \neq \bar{0}$ und $\bar{\mathfrak{p}}_1=(\bar{0}:\bar{\mathfrak{a}}_1)_r$ ist ein Primideal aus $\bar{\mathfrak{o}}$. Es ist $(\bar{\mathfrak{a}}_1 \frown \bar{\mathfrak{p}}_1)^2 \leqq \bar{\mathfrak{a}}_1\bar{\mathfrak{p}}_1=\bar{0}$, also $\bar{\mathfrak{a}} \frown \bar{\mathfrak{p}}_1=\bar{0}$. Ferner ist $(\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1)=\bar{\mathfrak{o}}$, da $\bar{\mathfrak{p}}_1$ stark teilerlos ist. Demnach ist $\bar{\mathfrak{o}}=\bar{\mathfrak{a}}_1+\bar{\mathfrak{p}}_1$, $\bar{\mathfrak{a}}_1 \simeq \bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{p}}_1$. $\bar{\mathfrak{a}}_1$ ist einfacher Ring. Ist $\bar{\mathfrak{p}}_1 \neq \bar{0}$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}_1=\bar{\mathfrak{a}}_2+\bar{\mathfrak{p}}_2$ mit einem einfachen Ring $\bar{\mathfrak{a}}_2$, u. s. w. Man erhält also eine Kette $\bar{\mathfrak{o}} \supset \bar{\mathfrak{p}}_1 \supset \bar{\mathfrak{p}}_2 \supset \cdots$, welche nach endlichvielen abbricht. Also ist $\bar{\mathfrak{o}}$ die direkte Summe von endlich vielen einfachen Ringen, d. h. $\bar{\mathfrak{o}}$ ist halbeinfach. Jetzt sei $\mathfrak{o}'$ ein Teilnilring von $\mathfrak{o}$. Dann ist $(\mathfrak{o}', \mathfrak{c})/\mathfrak{c}$ ein Teilnilring des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, also ist er nilpotent.[2] Da $\mathfrak{c}$ nilpotent ist, ist $\mathfrak{o}'$ nilpotent.

§ 2. Satz 2. *Besitzt ein Schiefring mit dem Vielfachenkettensatz*

---

1) Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn in $\mathfrak{o}$ der Vielfachenkettensatz für Linksideale gilt.

2) J. Levitzki, Über nilpotente Unterringe, Math. Ann. **105** (1931), S. 620–627.

für Linksideale mindestens einen Nichtnullteiler, so besitzt er das Einselement.

Beweis. a sei ein Nichtnullteiler von $\mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}a \geqq \mathfrak{o}a^2 \geqq \cdots$ ein Vielfachenkette der Linksideale ist, gibt es ein n mit $\mathfrak{o}a^n = \mathfrak{o}a^{n+1}$. Für ein beliebiges Element x gibt es also ein Element y derart, dass $xa^n = ya^{n+1}$ ist. Daraus folgt $x = ya$, da a ein Nichtnullteiler ist. Bedeutet e ein Element mit $a = ea$, so ist $e \neq 0$ und $(x - xe)a = xa - xea = 0$, also $x - xe = 0$, $x = xe$. Es folgt daher

$$a(x-ex) = ax - aex = ax - ax = 0\,,$$

also $x - ex = 0$, $x = ex$. Damit ist gezeigt, dass e das Einselement von $\mathfrak{o}$ ist.

Hilfssatz. $\mathfrak{o}$ sei ein halbeinfacher Ring, $\mathfrak{M}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksmodul und das Einselement von $\mathfrak{o}$ sei Einheitsoperator von $\mathfrak{M}$. Haben die Teilmoduln von $\mathfrak{M}$ die Minimaleigenschaft, so ist $\mathfrak{M}$ vollständig reduzibel.

Beweis. $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 + \cdots + \mathfrak{o}e_t$ sei eine Zerlegung von $\mathfrak{o}$ in einfache Linksideale. $\mathfrak{M}$ ist die Summe aller Teilmoduln $\mathfrak{o}e_iu$ $(u \in \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{o}e_iu$ ist entweder Null oder einfacher Modul. Jetzt sei $\mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 + \cdots + \mathfrak{o}u_n$ eine direkte Summe von einfachen Teilmoduln. Ist ein einfacher Teilmodul $\mathfrak{o}u_{n+1}$ nicht in ihr enthalten, so ist die Summe $\mathfrak{o}u_1 + \cdots + \mathfrak{o}u_n + \mathfrak{o}u_{n+1}$ direkt. Man erhält eine Kette von Teilmoduln

$$\mathfrak{o}u_1 \subset \mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 \subset \mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 + \mathfrak{o}u_3 \subset \cdots\,,$$

die nach endlichvielen abbrechen muss. Denn sonst bildet

$$\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{N}_3 \supset \cdots\,, \qquad (\mathfrak{N}_i = \mathfrak{o}u_i + \mathfrak{o}u_{i+1} + \cdots)$$

eine Vielfachenkette von Teilmoduln. $\mathfrak{M}$ ist also direkte Summe von einfachen Moduln, d. h. $\mathfrak{M}$ ist vollständig reduzibel.

Satz 3. *$\mathfrak{o}$ sei ein Schiefring mit Nichtnullteilern. Gilt in $\mathfrak{o}$ der Vielfachenkettensatz für Linksideale, so gilt in $\mathfrak{o}$ der Teilerkettensatz für Linksideale.*

Beweis. Nach Satz 2 besitzt $\mathfrak{o}$ das Einselement. Bedeutet $\mathfrak{c}$ das maximale zweiseitige Nilideal (Radikal) von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{c}$ nilpotent, und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist halbeinfach. $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{c} \supset \mathfrak{c}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{c}^\rho = 0$ bildet eine Kette von $\mathfrak{o}$-Linksmoduln. Weil der Restklassenmodul $\mathfrak{c}^i/\mathfrak{c}^{i+1}$ als $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$-Linksmodul betrachtet wird, ist er nach dem Hilfssatz vollständig reduzibel. $\mathfrak{c}^i/\mathfrak{c}^{i+1}$ besitzt also als $\mathfrak{o}$-Linksmodul eine Kompositionsreihe. Daher besitzt $\mathfrak{o}$ als $\mathfrak{o}$-Linksmodul eine Kompositionsreihe, d. h. es gilt in $\mathfrak{o}$ der Doppelkettensatz für Linksideale.

Aus Satz 3 folgt sofort der folgende

Satz 4. *Ist $\mathfrak{o}$ ein Schiefring mit Einselement derart, dass es für jedes Element $a \neq 0$ ein Element $b \neq 0$ mit $\mathfrak{o}a \geqq b\mathfrak{o}$ gibt, so folgt der Teilerkettensatz für Linksideale aus dem eingeschränkten Vielfachenkettensatz für Linksideale.*

Jetzt sei $\mathfrak{o}$ ein Schiefring mit Einselement derart, dass es für jeden Nichtnullteiler α einen Nichtnullteiler β mit $\alpha\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}\beta$ gilt. Dann gibt es den Quotientenring von $\mathfrak{o}$, d. h. einen Erweiterungsring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{o}$, so dass jedes Element aus $\mathfrak{S}$ durch rechtsseitige Multiplikation mit einem Nichtnullteiler aus $\mathfrak{o}$ in ein Element aus $\mathfrak{o}$ verwandeln lässt.[1] Ferner sei $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung von $\mathfrak{S}$, d. h. es gebe keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ring $\mathfrak{o}^*$ mit

$$\mathfrak{S} \supset \mathfrak{o}^* \supset \mathfrak{o}, \qquad \lambda\mathfrak{o}^*\mu \subset \mathfrak{o},$$

wo λ, μ Nichtnullteiler von $\mathfrak{o}$ sind. Nach Satz 1 und meiner früheren Arbeit[2] gilt der

Satz 5. *$\mathfrak{o}$ sei ein oben genannter Ring, in dem der eingeschränkte Vielfachenkettensatz für zweiseitige Ideale gilt und jedes Primideal starkt teilerlos ist. Dann gilt in $\mathfrak{o}$ der Teilerkettensatz für einseitige (sowohl links- als auch rechtsseitige) Ideale sowie der eingeschränkte Vielfachenkettensatz für einseitige Ideale. Dabei sollen die Ideale Nichtnullteiler enthalten.*

§ 3. Zum Schluss wollen wir bemerken, dass der folgende Satz gilt:

Satz 6. *Im Schiefring mit Einselement sind der Kettensatz für Linksideale und der Kettensatz für Rechtsideale unabhängig.*

K sei ein (nicht notwendig kommutativer) Körper und $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ seien abzählbar viele, einander kommutative, unabhängige, rein transcendente Unbestimmte. Der Polynombereich $K[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$ kann zum Quotientenkörper $\mathfrak{K} = K(x_1, x_2, \cdots)$ ergänzt werden. $\mathfrak{K}' = K(x_2, x_4, \cdots, x_{2n}, \cdots)$ ist ein mit $\mathfrak{K}$ isomorpher Teilkörper von $\mathfrak{K}$. Wir bilden nun einen $\mathfrak{K}$-Linksmodul $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}u$ vom Range 2 über $\mathfrak{K}$. Sei $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ ($\alpha \in \mathfrak{K}$, $\alpha' \in \mathfrak{K}'$) ein Isomorphismus von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ und man setze fest:

$$(\beta u)\alpha = (\beta\alpha')u, \qquad (\beta u)(\alpha u) = 0.$$

Setzt man ferner das Distributivgesetz voraus, so bildet $\mathfrak{S}$ einen Schiefring mit dem Radikal $\mathfrak{K}u$. In $\mathfrak{S}$ gilt der Doppelkettensatz für Linksideale, da $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{K}u \supset 0$ die Kompositionsreihe von $\mathfrak{S}$ als $\mathfrak{S}$-Linksmodul ist. Bedeutet $\mathfrak{M}$ einen beliebigen $\mathfrak{K}'$-Rechtsmodul mit $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{M} \supset \mathfrak{K}'$, so ist $\mathfrak{M}u$ ein Rechtsideal von $\mathfrak{S}$. Es gilt also in $\mathfrak{S}$ weder Teilerkettensatz noch Vielfachenkettensatz für Rechtsideale.

---

1) Vgl. K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen, Jap. J. Math. **16** (1939), S. 1–36.

2) K. Asano, a. a. O.