83. Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Kugelfunktionen.

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1939.)

In der vorliegenden Note soll zunächst die bekannte Theorie der abgeschlossenen Familie (closed family) von fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe $\mathfrak{G}$[1] auf die rechtsseitig abgeschlossene Familie verallgemeinert werden (§ 1). Daraus wird sich die Weylsche Theorie[2] der Entwicklung von Funktionen auf der homogenen Mannigfaltigkeit herleiten lassen (§ 2). Zum Schluss sollen als wichtiges Beispiel die Kugelfunktionen auf der n-dimensionalen Kugel gruppentheoretisch näher betrachtet werden (§ 3).

1. Für eine abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ definieren wir nach dem Vorbild von J. von Neumann (N. Def. 13) die *rechtsseitig abgeschlossene Familie* $\mathfrak{F}$ von fastperiodischen Funktionen folgendermassen:

1) $\mathfrak{F}$ ist die Menge von (komplexwertigen) fastperiodischen Funktionen $f(s)$ auf $\mathfrak{G}$.

2) Aus $\mathfrak{F} \ni f(s)$ folgt $f(sa) \in \mathfrak{F}$, falls a ein Element aus $\mathfrak{G}$ ist.

3) Aus $\mathfrak{F} \ni f(s)$, $\mathfrak{F} \ni g(s)$ folgt $\mathfrak{F} \ni \alpha f(s) + \beta g(s)$, falls α, β Konstanten sind.

4) Aus $\mathfrak{F} \ni f_n(s)$ $(n=1, 2, \dots)$ und $f_n(s) \to f(s)$ gleichmässig auf $\mathfrak{G}$ (bei $n \to \infty$) folgt $\mathfrak{F} \ni f(s)$.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{F}$ immer eine rechtsseitig abgeschlossene Familie. Es sei nun $\mathfrak{D}: s \to D(s) = \big(d_{ij}(s)\big)$ eine irreduzible unitäre Darstellung n-ten Grades von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{m}$ sei ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{D}$, welcher aus Funktionen von $\mathfrak{F}$ besteht, wobei $t \cdot f(s) = f(st)$ bedeutet. Wenn also $\big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big)$ eine passend gewählte Basis von $\mathfrak{m}$ ist, dann gilt nämlich

$$(1) \qquad t\big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big) = \big(f_1(st), \dots, f_n(st)\big) = \big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big)\, D(t)\,,$$

Insbesondere ist

$$(2) \qquad \big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big) = \big(f_1(1), \dots, f_n(1)\big)\, D(s)\,;$$

Also entspricht jedem Darstellungsmodul $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{D}$ ein n-dimensionaler (komplexwertiger) Euklidischer Vektor

$$(3) \qquad \mathfrak{v}(\mathfrak{m}, \mathfrak{D}) = \big(f_1(1), \dots, f_n(1)\big)\,,$$

der vom 0-Vektor verschieden und bis auf einen Konstantenfoktor durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{D}$ eindeutig bestimmt ist.

1) J. von Neumenn, Almost periodic functions in a group; Trans. Am. math. Soc., **38**, (1934); im folgenken zitiert mit (N).

2) H. Weyl, Harmonics on spherical manifolds, Annals of math., **35**, (1934).

Sind $\big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big)$ und $\big(f'_1(s), \dots, f'_n(s)\big)$ $(f_i, f'_i \in \mathfrak{F})$ Basen zweier Darstellungsmoduln von $\mathfrak{D}$, so ergibt sich aus jedem von beiden eine Darstellung wie bei (1), und $\big(\alpha f_1(s) + \beta f'_1(s), \dots, \alpha f_n(s) + \beta f'_n(s)\big)$ ist deshalb auch eine Basis eines Darstellungsmoduls von $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{F}$, falls α, β Konstanten sind. Einer Darstellung $\mathfrak{D}$ lässt sich also ein linearer Unterraum $\mathfrak{V}(\mathfrak{D})$ im n-dimensionalen komplexen Euklidischen Raume $\mathfrak{E}_n$ zuordnen, der aus Vektoren $a\mathfrak{d}(\mathfrak{m}, \mathfrak{D})$ für alle Darstellungsmoduln $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{F}$ bestehen. Wenn $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ äquivalent sind, also $P^{-1}D(s)P = D'(s)$ für eine konstante Matrix P gilt, so ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{D})P = \mathfrak{V}(\mathfrak{D}')$. Daher ist die Dimension r von $\mathfrak{V}(\mathfrak{D})$ eindeutig durch die äquivalente Darstellungsklasse bestimmt.

Eine unitäre Transformation P von Koordinaten in $\mathfrak{E}_n$ können wir so wählen, dass $\mathfrak{V}(\mathfrak{D})P$ aus $\mathfrak{d}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{D})P = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathfrak{d}(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{D})P = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathfrak{d}(\mathfrak{m}_r, \mathfrak{D})P = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ linear aufgespannt wird. Damit sehen wir sofort aus (2) und (3) ein, dass für die Darstellung $\mathfrak{D}'$ $\Big(s \to \big(d'_{ij}(s)\big) = P^{-1}D(s)P\Big)$ $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{m}_i = a_1 d'_{i1}(s) + \cdots + a_n d'_{in}(s)$ mit konstanten $a_1, \dots, a_n$ $(i = 1, \dots, r)$ sind, wobei r die Dimension von $\mathfrak{V}(\mathfrak{D})$ bedeutet. Wir nennen eine solche Darstellung $\mathfrak{D}'$ *in bezug auf* $\mathfrak{F}$ *normiert.* Alsdann gilt der folgende

Satz 1. Für jede unitäre irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_0$ *von* $\mathfrak{G}$ *gibt es eine unitär äquivalente in bezug auf* $\mathfrak{F}$ *normierte Darstellung* $\mathfrak{D}$ $\Big(s \to D(s) = \big(d_{ij}(s)\big)\Big)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Alle* $d_{ij}(s)$ $(i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n)$ *gehören zu* $\mathfrak{F}$, *wo* $r = \dim \mathfrak{V}(\mathfrak{D}_0)$ *ist.*

2) *Für jede Basis* $\big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big)$ *des Darstellungsmoduls* $\mathfrak{m}$ *von* $\mathfrak{D}$, *die aus Funktionen von* $\mathfrak{F}$ *besteht, mit der Eigenschaft* (1) *gilt*

$$f_j(s) = \sum_{i=1}^{r} a_i d_{ij}(s) \qquad (j = 1, \dots, n;\ a_i \text{ Konstante}).$$

Wir nennen diejenige unitäre Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$, die einen Darstellungsmodul aus $\mathfrak{F}$ hat, eine *$\mathfrak{F}$-Darstellung.*

Satz 2. Für jede unitäre irreduzible $\mathfrak{F}$*-Darstellung* $\mathfrak{D}'$ $n(\mathfrak{D}')$*-ten Grades von* $\mathfrak{G}$ *sei eine unitär äquivalente in bezug auf* $\mathfrak{F}$ *normierte Darstellung* $\mathfrak{D}$: $s \to \big(d_{ij}(s)\big)$ *zugeordnet.*

1) *Für die Gesamtheit* $\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) = \{d_{ij}^{(\mu)}(s)\}$ $\Big(i = 1, \dots, r(\mathfrak{D}^{(\mu)}); r(\mathfrak{D}^{(\mu)}) = \dim \mathfrak{V}(\mathfrak{D}^{(\mu)}); j = 1, \dots, n(\mathfrak{D}^{(\mu)})\Big)$ *der (in bezug auf* $\mathfrak{F}$ *normierten) unitären irreduziblen* $\mathfrak{F}$*-Darstellungen* $\mathfrak{D}$ *gilt die Parsevalsche Gleichung: für jede* $f(s)$, $g(s) \in \mathfrak{F}$ *gilt*

$$\underset{s}{M} f(s)\overline{g(s)} = \sum_{\mu} \frac{1}{n(\mathfrak{D}^{(\mu)})} \sum_{i=1}^{r(\mathfrak{D}^{(\mu)})} \sum_{j=1}^{n(\mathfrak{D}^{(\mu)})} \alpha_{ij}^{(\mu)} \overline{\beta_{ij}^{(\mu)}},$$

mit

$$\alpha_{ij}^{(\mu)} = \underset{s}{M} f(s)\overline{d_{ij}^{(\mu)}(s)}; \qquad \beta_{ij}^{(\mu)} = \underset{s}{M} g(s)\overline{d_{ij}^{(\mu)}(s)}.$$

2) *Für jede* $f(s) \in \mathfrak{F}$ *gibt es endlich viele* $d_{ij}^{(\mu)}(s) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{F})$, *so dass*

$$|f(s)-\sum \gamma_{ij}^{(\mu)} d_{ij}^{(\mu)}(s)| < \varepsilon \qquad (\gamma_{ij}^{(\mu)} \textit{ Konstante}),$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Wie bei N., Satz 31, gilt die folgende Tatsache:

1) Wenn $f(s) \in \mathfrak{F}$ ist, so ist auch $f \times g(s) \in \mathfrak{F}$ für beliebige fastperiodische Funktion $g(s)$.

2) Aus $d_{ij}(s) \in \mathfrak{F}$ folgt $d_{il}(s) \in \mathfrak{F}$ $\big(l=1, \dots, n(\mathfrak{D})\big)$.

3) Ist für irgendeine unitäre irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ und eine Funktion $f(s) \in \mathfrak{F}$ $a_{ij}=M_s f(s)\overline{d_{ij}(s)} \neq 0$, so gehört $d_{ij}(s)$ zu $\mathfrak{F}$, also zu $\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$.

3) Lässt sich so beweisen: wegen

$$f \times d_{jk}(s) = \sum_{l=1}^{n(\mathfrak{D})} a_{lj} d_{lk}(s) \qquad \big(k=1, \dots, n(\mathfrak{D})\big)$$

mit $a_{ij} \neq 0$ bildet das System

$$\left(\sum_{l=1}^{n(\mathfrak{D})} a_{lj} d_{l1}(s), \dots, \quad \sum_{l=1}^{n(\mathfrak{D})} a_{lj} d_{ln}(s)\right)$$

nach 1) eine Basis eines zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Darstellungsmoduls von $\mathfrak{D}$. Also ist $\mathfrak{D}$ eine $\mathfrak{F}$-Darstellung. Nach Satz 1, 2) gilt $a_{lj}=0$ für $l > r = \dim \mathfrak{B}(\mathfrak{D})$, da wir uns jede $\mathfrak{F}$-Darstellung in bezug auf $\mathfrak{F}$ normiert denken; also $i \leqq r$ und $d_{ij}(s) \in \mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$. Daher gilt die Parsevalsche Gleichung wie bei N., Satz 31.

Approximationssatz 2) folgt nach 1) und 3) aus der Ungleichung

$$|f(s)-f \times g \times \phi(s)| < \varepsilon \qquad (\phi=\phi', \ \phi \times \phi = \phi),$$

wie bei Sätze 18 und 29 von N.

2. Es sei nun eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ und deren transitive Transformationgruppe $\mathfrak{G}$ gegeben, wobei eine Transformation eine eineindeutige Zuordnung von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst bedeutet. Wir können aus einer komplexwertigen Funktion $f(P)$ auf $\mathfrak{M}$ eine entsprechende Funktion $f(s) = f(P_0^s)$ auf $\mathfrak{G}$ für einen bestimmten Punkt P_0 von $\mathfrak{M}$ herleiten; wobei P^s das Bild von $P \in \mathfrak{M}$ durch die Transformation $s \in \mathfrak{G}$ ist. $\mathfrak{H}$ sei die Gesamtheit aller Transformationen t mit $P_0^t = P_0$, dann sehen wir sofort folgende Tatsache ein: dann und nur dann lässt sich eine Funktion $f(s)$ auf $\mathfrak{G}$ aus einer Funktion auf $\mathfrak{M}$ (für einen bestimmten Punkt P_0) wie oben herleiten, wenn $f(ts)=f(s)$ für jede t aus $\mathfrak{H}$ gilt.

I. Wir nennen eine Funktion $f(P)$ auf $\mathfrak{M}$ fastperiodisch, wenn $\big\{s \cdot f(P) \big(=f(P^s)\big)\big\}$ $(s \in \mathfrak{G})$ nach der Metrik $\rho\big(f(P), g(P)\big) = \overline{\text{fin}}_{P \in \mathfrak{M}} \big(|f(P)-g(P)|\big)$, ε-Netz bei jedem $\varepsilon > 0$ hat; oder, was dasselbe ist, die entsprechende Funktion $f(s)=f(P_0^s)$ auf $\mathfrak{G}$ im Sinne von J. von Neumann fastperiodish ist.[1] Die Gesamtheit aller fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{G}$, für die $f(ts)=f(s)$ bei jedem t aus $\mathfrak{H}$ gilt, bildet ersichtlich eine rechtsseitig abgeschlossene Familie $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$. Wenn wir also im Satz 2 $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ setzen und $f(s)=f(P_0^s)$, M_s auf $\mathfrak{G}$ durch $f(P)$ bzw.

1) Vgl. N. und W. Maak, Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen; Abhandlungen aus dem math. Seminar, Hamburg, **11**, (1936).

M_P auf $\mathfrak{M}$ ersetzen, so gewinnen wir gerade die am Anfang erwähnte Weylsche Theorie.

II. Es sei nun $\mathfrak{M}$ ein Kompaktum und $\mathfrak{G}$ enthalte nur stetige Transformationen. Falls wir dann die Metrik in $\mathfrak{G}$ $\rho_{\mathfrak{G}}(s, t) = \max_{P \in \mathfrak{M}} \rho_{\mathfrak{M}}(P^s, P^t)$ aus der von $\mathfrak{M}$ einführen, so sei $\mathfrak{G}$ ferner eine separable kompakte topologische Gruppe. Alsdann ist $\mathfrak{M}$ homöomorph mit dem Zerlegungsraum von $\mathfrak{G}$ nach den Nebengruppen von der abgeschlossenen Untergruppe $\mathfrak{H}$. Alle stetigen Funktionen auf $\mathfrak{G}$, die $f(ts) = f(s)$, $t \in \mathfrak{H}$ genügen, bilden auch die rechtsseitig abgeschlossene Familie $\mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})$, und wenn wir im Satz 2 $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})$ setzen, können wir entsprechend $f(s)$ bzw. M_s auf $\mathfrak{G}$ durch die stetige Funktion $f(P)$ bzw. das eindeutig existierende bzgl. der Transformationen aus $\mathfrak{G}$ invariante Integral auf $\mathfrak{M}$ ersetzen.

In beiden Fällen gilt der folgende.

Satz 3. *$r = \dim \mathfrak{V}(\mathfrak{D})$ im Satz 2 ist gerade die Anzahl a der Hauptdarstellung von $\mathfrak{H}(t \to 1, t \in \mathfrak{H})$ in $\mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{D}$ als die Darstellung von $\mathfrak{H}$ voll reduziert wird. Eine Darstellung $\mathfrak{D}$ ist also dann und nur dann $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$-oder $\mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})$-Darstellung, wenn $\mathfrak{D}$ in der von der Hauptdarstellung von $\mathfrak{H}$ induzierten Darstellung[1] als irreduziebler Bestandteil enthalten ist.*

Beweis. Aus $d_{ij}(ts) = d_{ij}(s)$, insbesondere $d_{ij}(t) = \delta_{ij} (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n)$ bei $t \in \mathfrak{H}$ für die in bezug auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ normierte Darstellung $\mathfrak{D}$ folgt $\big(d_{ij}(t)\big) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & D_1(t) \end{pmatrix}$, da $D(t)$ unitär ist. Also ist $a \geqq r$. Wenn umgekehrt $QDQ^{-1} = D'$, $D'(t) = \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & D'_1(t) \end{pmatrix}$ gilt, so gehören $d'_{ij}(s)$ $(i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, n)$ zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$, und den Basen $\big(d'_{i1}(s), \dots, d'_{in}(s)\big)Q$ der Darstellungsmoduln $\mathfrak{m}_i$ $(i = 1, \dots, a)$ entsprechenden Vektoren $\mathfrak{v}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{D}')Q = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)Q$ spannen einen a-dimensionalen Linearraum in $\mathfrak{V}(\mathfrak{D})$ auf. Daher ist $a \leqq r$, also $a = r$.

Wegen der späteren Anwendung sei hier noch der folgende Hilfssatz bemerkt, der analog wie bei Satz 3 leicht zu beweisen ist.

Hilfssatz 1. *Wenn eine unitäre Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ einen Darstellungsmodul aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ $\big($oder $\mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})\big)$ besitzt, und zwar die Hauptdarstellung von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{D}$ nur einmal auftritt, so ist diese Darstellung $\mathfrak{D}$ irreduzibel.*

3. Als das wichtige Beispiel sei nun $\mathfrak{M}$ die $n-1$-dimensionale Kugel $\mathfrak{K}_n(x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1)$ und $\mathfrak{G}$ die reelle orthogonale Gruppe n-ten Grades $\mathfrak{O}_n$. Wir topologisieren $\mathfrak{K}_n$ und $\mathfrak{O}_n$ wie üblich und denken uns $\mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})$ von 2. II. Wird $P_0 = (1, 0, \dots, 0)$ gesetzt, dann ist $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{O}_{n-1}$ die Gesamtheit aller Elemente von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad O_{n-1} \in \mathfrak{O}_{n-1}. \tag{4}$$

Es sei noch $\mathfrak{M}_m$ bzw. $\mathfrak{S}_m$ die Gesamtheit aller homogenen Polynome in $x_1, \dots, x_n$ m-ten Grades auf $\mathfrak{K}_n$ bzw. aller Polynome auf $\mathfrak{K}_n$, deren

---

1) T. Nakayama, A remark on representations of groups; Bull. Am. math. Soc., (1938). $r = a$ besagt nach dem Satz 2 die bekannte Relation für induzierte Darstellung.

Grade höchstens m sind, dann bildet $\mathfrak{M}_m$ bzw. $\mathfrak{S}_m$ einen Darstellungsmodul von $\mathfrak{O}_n$.

Wir sehen nun leicht die folgenden Tatsachen ein:

1) Wenn ein Polynom $f(x_1, \cdots, x_n)$ auf jedem Punkt von $\mathfrak{K}_n$ verschwindet, so ist $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1)\, g(x_1, \cdots, x_n)$, wo $g(x_1, \cdots, x_n)$ auch ein Polynom ist. Also ist insbesondere $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$, wenn f homogen ist.

2) Es gilt $\mathfrak{S}_{m-1} \frown \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}_{m-2} (m \geqq 2)$.

3) Es sei für ein Polynom $f(x_1, \cdots, x_n)$ bei jedem $O_n \in \mathfrak{O}_n f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1', \cdots, x_n')$, wo $(x_1', \cdots, x_n') = (x_1, \cdots, x_n) \cdot O_n$ ist, dann ist $f(x_1, \cdots, x_n)$ ein Polynom von $z = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.[1]

Aus 1) folgt zunächst Rang $\mathfrak{M}_m = h_m = \binom{n+m-1}{m}$. Wenn man $\mathfrak{M}_m$ in die drekte Summe der (nach dem inneren Produkt $(f, g) = \int_{\mathfrak{K}_n} f \bar{g} dv$) zueinander orthogonalen Moduln $\mathfrak{M}_{m-2}$, $\mathfrak{M}_m^0$ zerlegt

$$\mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}_{m-2} + \mathfrak{M}_m^0, \qquad (m \geqq 2), \tag{5}$$

so ist $\mathfrak{M}_m^0$ auch ein Darstellungsmodul mit dem Rang $h_m - h_{m-2}$, weil $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{M}_{m-2}$ beide Darstellungsmoduln sind. Für $m = 1{,}0$ setzen wir $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{M}_1^0$, $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{M}_0^0$. Dann gilt nach 2) eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{S}_m$

$$\mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}_{m-1} + \mathfrak{M}_m^0. \tag{6}$$

Hilfssatz 2. Die Darstellung $\mathfrak{D}_m$ von $\mathfrak{O}_n$ durch $\mathfrak{M}_m^0$ ist irreduzible.

Um das zu beweisen, benutzen wir den Hilfssatz 1. Es gäbe also zwei linear unabhängige Polynome f, f' in $\mathfrak{M}_m^0$, die beide die Hauptdarstellung von $\mathfrak{H}$ geben: nämlich $f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2', \cdots, x_n')$ und $f'(x_1, \cdots, x_n) = f'(x_1, x_2', \cdots, x_n')$ (aus (4)), wenn $(x_2', \cdots, x_n') = (x_2, \cdots, x_n) O_{n-1}$, $O_{n-1} \in \mathfrak{O}_{n-1}$ ist. Wenn wir aber $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} a_i x_1^i g_i(x_2, \cdots, x_n)$ setzen, dann ist $g_i(x_2, \cdots, x_n) = g_i(x_2', \cdots, x_n')$, also nach 3) $g_i(x_2, \cdots, x_n) = g_i^0\big((x_2^2 + \cdots + x_n^2)\big) = g_i^0\big((1 - x_1^2)\big)$ auf $\mathfrak{K}_n$. Daher ist $f(x_1, \cdots, x_n) = f_0(x_1)$ vom Grade m auf $\mathfrak{K}_n$, weil $f \in \mathfrak{M}_m^0$ aus $\mathfrak{M}_m^0 \frown \mathfrak{S}_{m-1} = 0$ nicht ausarten kann. Gleicherweise wäre $f'(x_1, \cdots, x_n) = f_0'(x_1)$ vom Grade m. Also wäre $\alpha f - \beta f' \in \mathfrak{S}_{m-1}$

---

1) Hier gebe ich einen Beweis. 1) Es sei f homogen vom Grade m, dann ist $f(x_1, \ldots, x_n) = r^m f\left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_n}{r}\right) = 0$; wo $r^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ ist. Wenn f nicht homogen vom Grade m ist, können wir homogenes Polynom f_1 bzw. f_2 des Grades m bzw. $m-1$ wählen, so dass $f \equiv f_1 + f_2$ (mod. $x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$) gilt. Wenn $f_0 = f_1 + f_2 \neq 0$ wäre, dann wäre $0 = f_0\left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_n}{r}\right) = r^{-m} f_1(x_1, \ldots, x_n) + r^{-m+1} f_2(x_1, \ldots, x_n)$, also $r = f_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_2(x_1, \ldots, x_n)^{-1}$, was unmöglich ist. 2) Es sei $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in \mathfrak{M}_m$, $g \in \mathfrak{S}_{m-1}$ auf $\mathfrak{K}_n$, dann ist $f - g = (x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1) \cdot h(x_1, \ldots, x_n)$, $h \in \mathfrak{S}_{m-2}$ nach 1). Wenn man $h(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1, \ldots, x_n) + h_2(x_1, \ldots, x_n)$, $h_1 \in \mathfrak{M}_{m-2}$ bzw. $h_2 \in \mathfrak{S}_{m-3}$, zerlegt, so ist $f = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) h_1$. 3) Es genügt denjenigen Fall zu betrachten, dass f homogen vom Grade m ist. Aus $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1', \ldots, x_n') = a =$ Kontant auf $\mathfrak{K}_n$ ergibt sich $f(x_1, \ldots, x_n) = r^m f\left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_n}{r}\right) = a r^m$.

mit Konstanten α, $\beta(\neq 0)$, und zwar $\alpha f - \beta f' = 0$ (wegen $\mathfrak{M}_m^0 \frown \mathfrak{S}_{m-1} = 0$); was der Annahme widerspricht.

Hilfssatz 3. Der Modul $\mathfrak{H}_m^0$, der die Gesamtheit aller homogenen Polynome vom Grade m mit $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$ ist, stimmt mit $\mathfrak{M}_m^0$ überein.

Denn $\mathfrak{H}_0^0 = \mathfrak{M}_0^0$ und $\mathfrak{H}_1^0 = \mathfrak{M}_1^0$ sind klar. Es sei nun $\mathfrak{H}_r^0 = \mathfrak{M}_r^0$ $(r < m)$, dann beweisen wir $\mathfrak{H}_m^0 = \mathfrak{M}_m^0$ folgenderweise. Nach der Voraussetzung gilt aus (5)

$$\mathfrak{M}_{m-2} = \mathfrak{M}_{m-2}^0 + \mathfrak{M}_{m-4}^0 + \cdots = \mathfrak{H}_{m-2}^0 + \mathfrak{H}_{m-4}^0 + \cdots. \tag{7}$$

Wie in der üblichen Theorie der Kugelfunktionen sind $\mathfrak{H}_m^0$ und $\mathfrak{H}_r^0 (m \neq r)$ zueinander orthogonal nach dem Greenschen Satze, also ist aus (7) auch $\mathfrak{H}_m^0$ zu $\mathfrak{M}_{m-2}$ orthogonal, und $\mathfrak{H}_m^0 \subset \mathfrak{M}_m^0$ aus (5). Wie leicht zu sehen ist, ist $\mathfrak{H}_m^0$ ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{O}_n$, daher folgt $\mathfrak{H}_m^0 = \mathfrak{M}_m^0$ aus $\mathfrak{H}_m^0 \subset \mathfrak{M}_m^0$ nach dem Hilfssatz 2.

Satz 4. Die orthogonalen Basen $f_1^{(m)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{r_m}^{(m)}(x_1, \ldots, x_n)$, $\left(r_m = h_m - h_{m-2} = \frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\, m!}(2m+n-2) \text{ für } m \geqq 2;\ r_1 = n, r_0 = 1\right)$ von $\mathfrak{H}_m^0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ sind ein vollständig orthogonales System.

Bewis. Nach dem Weierstrasschen Approximationssatz gibt es für jede stetige Funktion f auf $\mathfrak{K}_n$ ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_p)$ bei jedem $\varepsilon > 0$, so dass $|f - p(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$ auf $\mathfrak{K}_n$ gilt. Aber aus (6), (7) ist $p(x_1, \ldots, x_n)$ lineare Kombination von endlich vielen $f_i^{(m)}$, also gilt der Satz.

Da $r_m < r_{m+1}$ ist, sind alle irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ verschieden. Also ist $r = \dim \mathfrak{V}(\mathfrak{D})$ im Satz 2 sämtlich gleich 1 in unserem Fall. Wenn wir (5), (6) und (7) mit der Darstellungstheorie von $\mathfrak{O}_n$ vergleichen, so sehen wir, ohne besondere Schwierigkeiten, dass $\mathfrak{D}_m = \langle P_0(m, 0, \ldots, 0) \rangle$[1] ist. Die merkwürdige Tatsache, dass $\mathfrak{D}_m$ alle irreduziblen stetigen Darstellungen von der eigentlich orthogonalen Gruppe $\mathfrak{O}_3^+$ durchläuft, ist also nur für $n = 3$ richtig, und für $n > 3$ gibt es sicher irreduzible stetige Darstellung von $\mathfrak{O}_n$, die nicht in $\mathfrak{D}_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ auftritt.

1) H. Weyl, The classical groups; (1939), Chapter V.