24. Über die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung.

Von Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., March 12, 1940.)

1. Die Geometrie der Bahnen (paths) ist zuerst von J. Douglas im Falle des verallgemeinerten Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\right) = 0 \tag{1}$$

$$(i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n\,;\ \alpha, \beta, \ldots = \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{K}\,;\ K < n)$$

erweitert worden[1]. Nach einigen Jahren hat E. Bortolotti auf ein solches System (1) ($H^i_{\alpha\beta}$: von den Parametern u^γ abhängig) eine neue Geometrie, die *intrinsik* genannt wird, unter der Gruppe aller Koordinaten- und Parameter-transformationen aufgebaut[2]. Die intrinsike Theorie dieses Systems ist auch von D. D. Kosambi durch die ihm eigentümliche Variationsmethode gemacht worden[3]. Herren Prof. Dr. A. Kawaguchi und H. Hombu haben im Jahre 1937 eine schöne allgemeine geometrische Theorie des Systems der partiellen Differentialgleichungen $m(\geqq 2)$-ter Ordnung gebracht; aber diese Theorie ist meistens *affin*[4]. Es stellt sich die ausserordentliche Schwierigkeit der Grundlegung der intrinsiken geometrischen Theorie der partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung für $m \geqq 3$ und $K \geqq 2$ heraus; und die intrinsike Theorie im Falle $m=3$ ist neulich *nur für die spezielle Form von* $H^i_{\alpha\beta\gamma}$ entwickelt worden[5].

In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns mit der Grundlegung der intrinsiken Theorie des Systems der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung beschäftigen. Den Fall anderer Werte von $m(>3)$ werden wir später behandeln[6].

---

1) J. Douglas, Systems of K-dimensional manifolds in an N-dimensional space, Math. Annalen, **105** (1931), 707–733.

2) E. Bortolotti, Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, Rendiconti di Lincei, (7), **23** (1936), 16–21, 104–110, 175–180.

3) D. D. Kosambi, The tensor analysis of partial differential equations, Tensor, Japan, **2** (1939), 36–39.

4) A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., (I), **6** (1937), 21–62.

5) T. Ohkubo, Die Geometrie der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, ibid., 113–124; H. Hashimoto, On the geometry of a system of partial differential equations of third order, ibid., **8** (1940), 163–172.

6) Für $m \geqq 3$ und $K=1$, d. h. im Falle des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen m-ter Ordnung: $\frac{d^m x^i}{dt^m} + H^i\left(t, x^j, \frac{dx^j}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}x^j}{dt^{m-1}}\right) = 0$, haben wir die intrinsike Theorie systematisch entwickelt; siehe S. Hokari, Zur neuen Behandlung der Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., (I), **8** (1940), 47–62.

2. Es seien $x^i (i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n)$ die Koordinaten eines Punktes in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n und $u^a (a, \beta, \gamma, \dots = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{K};\ K < n)$ voneinander unabhängige Parameter. Mittels dieser Parameter wird jede K-dimensionale Fläche in X_n durch die Gleichungen $x^i = x^i(u^{\dot{1}}, \dots, u^{\dot{K}})$ gegeben. In jedem Punkte der K-dimensionalen Fläche bestimmt ein Wertesystem der Grössen

$$x^i = x^i(u^a)\,, \quad p^i_{a(1)} \equiv p^i_{a_1} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{a_1}}\,, \quad p^i_{a(2)} \equiv p^i_{a_1 a_2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2}} \tag{2}$$

ein Flächenelement zweiter Ordnung. Wenn wir jetzt in jedem Punkte von X_n ein beliebiges Wertesystem (2) adjungieren, so kommt bekanntlich die $\frac{1}{2}n(n+5)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $F^{(2)}_n$ zustande, die aus allen K-dimensionalen Flächenelementen zweiter Ordnung besteht.

Wir ziehen nun ein System der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$\frac{\partial^3 x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \partial u^{a_3}} + H^i_{a(3)}(u^\gamma, x^j, p^j_{\gamma(1)}, p^j_{\gamma(2)}) = 0 \tag{3}$$

in Betracht, wo $H^i_{a(3)}$ abkürzend für $H^i_{a_1 a_2 a_3}$ eingeführt ist. Dabei setzen wir voraus, dass die Funktionen $H^i_{a(3)}$ notwendig vielmal differenzierbar und symmetrisch in bezug auf a_1, a_2, a_3 sind. Wenn das System (3) eine Lösung $x^i = x^i(u^{\dot{1}}, u^{\dot{2}}, \dots, u^{\dot{K}})$, deren funktionale Matrix $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}\right)$ den höchsten Rang K hat, gestattet, so ist ihr Ort eine K-dimensionale Fläche in X_n. Die sogenannte intrinsike Theorie im Sinne von E. Bortolotti besagt, dass sie unter den Koordinaten- und den Parameter-transformationen:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n)\,, \quad u^{a'} = u^{a'}(u^{\dot{1}}, u^{\dot{2}}, \dots, u^{\dot{K}}) \tag{4}$$

invariant ist.

Unter den betreffenden Transformationen (4) haben wir die Transformationsformeln von $p^i_{a(1)}, p^i_{a(2)}, p^i_{a(3)}$:

$$\begin{cases} p^{i'}_{a'_{(1)}} = p^i_{a(1)} X^{i'}_i U^{a_1}_{a'_1}\,, \\[1ex] p^{i'}_{a'_{(2)}} = p^i_{a(2)} X^{i'}_i U^{a_1}_{a'_1} U^{a_2}_{a'_2} + p^i_{a_1} p^j_{a_2} X^{i'}_{ij} U^{a_1}_{a'_1} U^{a_2}_{a'_2} + p^i_a X^{i'}_i U^a_{a'_1 a'_2}\,, \\[1ex] p^{i'}_{a'_{(3)}} = p^i_{a(3)} X^{i'}_i U^{a_1}_{a_1'} U^{a_2}_{a_2'} U^{a_3}_{a_3'} + 3 p^i_{(a_1 a_2} p^j_{a_3)} X^{i'}_{ij} U^{a_1}_{a'_1} U^{a_2}_{a'_2} U^{a_3}_{a'_3} + p^i_a X^{i'}_i U^a_{a'_1 a'_2 a'_3} \\[1ex] \qquad + 3 (p^i_{a_1 a_2} X^{i'}_i + p^i_{a_1} p^j_{a_2} X^{i'}_{ij}) U^{a_1}_{(a'_1 a'_2} U^{a_2}_{a'_3)} + p^i_{a_1} p^j_{a_2} p^k_{a_3} X^{i'}_{ijk} U^{a_1}_{a'_1} U^{a_2}_{a'_2} U^{a_3}_{a'_3}\,, \end{cases} \tag{5}$$

wobei abkürzend gesetzt sind:

$$X^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,, \quad X^{i'}_{ij} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\,, \quad X^{i'}_{ijk} = \frac{\partial^3 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}\,, \quad X^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,, \quad \text{usw.,}$$

$$U^{a'}_a = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a}\,, \quad U^{a'}_{a\beta} = \frac{\partial^2 u^{a'}}{\partial u^a \partial u^\beta}\,, \quad U^{a'}_{a\beta\gamma} = \frac{\partial^3 u^{a'}}{\partial u^a \partial u^\beta \partial u^\gamma}\,, \quad U^a_{a'} = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}}\,, \quad \text{usw.;}$$

folglich bestehen die Beziehungen

$$X_i^{i'} X_{i'}^j = \delta_i^j , \quad X_i^{i'} X_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'} ; \quad U_a^{a'} U_{a'}^{\beta} = \delta_a^{\beta} , \quad U_a^{a'} U_{\beta'}^a = \delta_{\beta'}^{a'} .$$

Zwischen $H_{a'_{(3)}}^{i'}$ und $H_{a(3)}^i$ bestehen die Beziehungen gemäss (5)

$$(6) \quad H_{a'_{(3)}}^{i'} = H_{a(3)}^i X_i^{i'} U_{a'_1}^{a_1} U_{a'_2}^{a_2} U_{a'_3}^{a_3} - 3 p_{(a_1 a_2}^i p_{a_3)}^j X_{ij}^{i'} U_{a'_1}^{a_1} U_{a'_2}^{a_2} U_{a'_3}^{a_3} - p_a^i X_i^{i'} U_{a'_1 a'_2 a'_3}^a$$
$$- 3 (p_{a_1 a_2}^i X_i^{i'} + p_{a_1}^i p_{a_2}^j X_{ij}^{i'}) U_{(a'_1 a'_2}^{a_1} U_{a'_3)}^{a_2} - p_{a_1}^i p_{a_2}^j p_{a_3}^k X_{ijk}^{i'} U_{a'_1}^{a_1} U_{a'_2}^{a_2} U_{a'_3}^{a_3} .$$

Die intrinsike Geometrie ist nichts anderes als die Invariantentheorie des Funktionensystems $H_{a(3)}^i$, dessen Transformationsformel bei den simultanen Transformationen (4) mit (6) gegeben werden.

Wir benutzen die Verkürzung

$$D_a f = \frac{\partial f}{\partial u^a} + p_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + p_{a\beta}^i \frac{\partial f}{\partial p_\beta^i} - H_{a\beta_1\beta_2}^i f_{;i}^{(\beta(2))}$$

für die Funktion $f(u^\gamma, x^j, p_{\gamma(1)}^j, p_{\gamma(2)}^j)$ in $F_n^{(2)}$. Dies ist nichts anderes als die Ableitung von f längs der Integralfläche von (3). Wenn die nK Grössen v^{ia} in $F_n^{(2)}$, welche im allgemeinen von $u^\gamma, x^j, p_{\gamma(1)}^j, p_{\gamma(2)}^j$ abhängig sind, sich bei den simultanen Transformationen (4) folgendermassen transformieren: $v^{i'a'} = v^{ia} X_i^{i'} U_a^{a'}$, so nennen wir v^{ia} einen gemischten kontravarianten Affinor zweiter Stufe. Für diesen Affinor werden die Ableitungen längs der Integralfläche von (3) durch die Beziehungen

$$(7) \qquad \delta_\beta v^{ia} = D_\beta v^{ia} + \Gamma_{j\beta}^i v^{ja} + G_{\gamma\beta}^a v^{i\gamma}$$

definieren, wo $\Gamma_{j\beta}^i$ und $G_{\gamma\beta}^a$ auch von $u^\gamma, x^j, p_{\gamma(1)}^j, p_{\gamma(2)}^j$ abhängen mögen und mittels der gegebenen Grösse $H_{a(3)}^i$ sich bestimmen sollen.

3. Aus der Transformationsformel (6) von $H_{a(3)}^i$ führen wir durch die wiederholten Differentiationen nach den höchsten Ableitungen $p_{\beta(2)}^i$

$$(8) \quad H_{a'_{(3)};j'}^{i'\ (\beta'_{(2)})} = H_{a(3);j}^{i\ (\beta(2))} X_i^{i'} X_{j'}^j U_{a'_1}^{a_1} U_{a'_2}^{a_2} U_{a'_3}^{a_3} U_{\beta_1}^{\beta'_1} U_{\beta_2}^{\beta'_2} - 3 \delta_{j'}^{i'} U_{\beta_1}^{\beta'_1} U_{\beta_2}^{\beta'_2} U_{(a'_1 a'_2}^{\beta_1} U_{a'_3)}^{\beta_2}$$
$$- 3 X_{hj}^{i'} X_{j'}^j U_{a'_1}^{a_1} U_{a'_2}^{a_2} U_{a'_3}^{a_3} U_{\beta_1}^{\beta'_1} U_{\beta_2}^{\beta'_2} \delta_{(a_1}^{\beta_1} \delta_{a_2}^{\beta_2} p_{a_3)}^h ,$$

$$(9) \quad H_{a'_{(3)};j'}^{i'\ (\beta'_{(2)})}{}_{;k'}^{(\gamma'_{(2)})} = H_{a(3);j}^{i\ (\beta(2))}{}_{;k}^{(\gamma(2))} X_i^{i'} X_{j'}^j X_{k'}^k U_{a'_1}^{a_1} U_{a'_2}^{a_2} U_{a'_3}^{a_3} U_{\beta_1}^{\beta'_1} U_{\beta_2}^{\beta'_2} U_{\gamma_1}^{\gamma'_1} U_{\gamma_2}^{\gamma'_2}$$

ein, daraus geht hervor, dass $H_{a(3);j}^{i\ (\beta(2))}{}_{;k}^{(\gamma(2))}$ die Bestimmungszahlen eines intrinsiken gemischten Affinors ist. Multiplizieren wir die Grösse $H_{a'_{(3)};j'}^{i'\ (\beta'_{(2)})}$ mit $p_{\gamma'}^{k'}$, so lautet wegen (8) durch Überschiebung in bezug auf $k' = j'$, $a'_2 = \beta'_1$, $a'_3 = \beta'_2$

$$p_{\gamma'}^{j'} H_{a'_1 a'_2 a'_3;j'}^{i'\ (a'_2 a'_3)} = p_\gamma^j H_{a_1 a_2 a_3;j}^{i\ (a_2 a_3)} X_i^{i'} U_{a'_1}^{a_1} U_{\gamma'}^{\gamma} - (K+2) U_{a'_1 a'_2}^{\beta} U_\beta^{a'_2} p_{\gamma'}^{i'}$$
$$- \frac{1}{2} (K+1)(K+2) X_{ij}^{i'} p_a^i p_\gamma^j U_{a'_1}^a U_{\gamma'}^\gamma ;$$

infolgedessen gehen diese Gleichungen über in

$$(10) \qquad K_{a'\beta'}^{i'} = K_{a\beta}^i X_i^{i'} U_{a'}^a U_{\beta'}^\beta - p_{[\beta'}^{i'} U_{a']\gamma'}^a U_a^{\gamma'} ,$$

setzend
$$K^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{K+2} p^j_{[\beta} H^i_{\alpha]\gamma\delta\,;\,j}{}^{(\gamma\delta)} .$$

Andererseits entsteht für den gemischten intrinsiken Affinor $p^{h'}_{\delta'} H^{i'}_{\alpha'_{(3)};\,j'}{}^{(\beta'_{(2)})}{}_{;\,k'}{}^{(\gamma'_{(2)})}$ durch Überschiebung in bezug auf $i'=j'$, $k'=h'$, $\alpha'_1=\beta'_1$, $\alpha'_2=\beta'_2$, $\alpha'_3=\delta'$: $A^{\gamma'}_{\delta'} = A^{\gamma}_{\delta} U^{\gamma'}_{\gamma} U^{\delta}_{\delta'}$, wobei der Kürze halber gesetzt sind:

$$A^{\gamma}_{\delta} = p^j_{\delta} H^i_{\alpha_{(3)};\,i}{}^{(\alpha_{(2)})}{}_{;\,j}{}^{(\alpha_3\gamma)} . \tag{11}$$

So sind A^{γ}_{δ} die Bestimmungszahlen eines Affinors. Setzen wir nun voraus, dass die Matrix (A^{γ}_{δ}) den höchsten Rang K hat, so gibt es einen Affinor a^{δ}_{ρ}, der den Beziehungen

$$A^{\gamma}_{\alpha} a^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{12}$$

genügt. Multiplizieren wir dazu die Gleichungen (10) mit $H^{j'}_{\alpha'_{(3)};\,j'}{}^{(\alpha'_{(2)})}{}_{;\,i'}{}^{(\alpha'_3\gamma')}$, so kommt durch Überschiebung in bezug auf i' unter Berücksichtigung von (11)

$$H^{j'}_{\alpha'_{(3)};\,j'}{}^{(\alpha'_{(2)})}{}_{;\,i'}{}^{(\alpha'_3\gamma')} K^{i'}_{\alpha'\beta'} = H^j_{\alpha_{(3)};\,j}{}^{(\alpha_{(2)})}{}_{;\,i}{}^{(\alpha_3\gamma)} K^i_{\alpha\beta} U^{\gamma'}_{\gamma} U^{\alpha}_{\alpha'} U^{\beta}_{\beta'} - A^{\gamma'}_{[\beta'} U^{\alpha}_{\alpha']\rho'} U^{\rho'}_{\alpha} .$$

Daher haben wir wegen (12)

$$L^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = L^{\gamma}_{\alpha\beta} U^{\gamma'}_{\gamma} U^{\alpha}_{\alpha'} U^{\beta}_{\beta'} - \delta^{\gamma'}_{[\beta'} U^{\alpha}_{\alpha']\rho'} U^{\rho'}_{\alpha} ,$$

wobei gesetzt sind:

$$L^{\gamma}_{\alpha\beta} = a^{\gamma}_{\rho} H^j_{\alpha_{(3)};\,j}{}^{(\alpha_{(2)})}{}_{;\,i}{}^{(\alpha_3\rho)} K^i_{\alpha\beta} .$$

Daraus folgt durch Überschiebung in bezug auf $\gamma'=\beta'$

$$L_{\alpha'} = L_{\alpha} U^{\alpha}_{\alpha'} - U^{\alpha}_{\alpha'\beta'} U^{\beta'}_{\alpha} , \tag{13}$$

wobei $L_{\alpha} = \dfrac{2}{K-1} L^{\beta}_{\alpha\beta}$ für $K>1$ gesetzt ist. Die Grösse L_{α} spielt die wichtige Rolle in unserer Theorie.

4. Wenn wir (8) nach $\alpha'_1\beta'_1$, $\alpha'_2\beta'_2$ überschieben, so lautet

$$H^{i'}_{\alpha'_1\alpha'_2\alpha';\,j'}{}^{(\alpha'_{(2)})} = H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha;\,j}{}^{(\alpha_{(2)})} X^{i'}_i X^j_{j'} U^{\alpha}_{\alpha'} - \frac{1}{2}(K+1)(K+2) X^{i'}_{ij} X^i_{j'} U^{\alpha}_{\alpha'} p^j_{\alpha} - (K+2)\delta^{i'}_{j'} U^{\alpha}_{\alpha'\beta'} U^{\beta'}_{\alpha} . \tag{14}$$

Mit Hilfe von (13) und (14) können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. Die n^2K Grössen

$$\Gamma^i_{j\alpha} = \frac{2}{(K+1)(K+2)} \{H^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha;\,j}{}^{(\alpha_{(2)})} - (K+2)\delta^i_j L_{\alpha}\} \tag{15}$$

transformieren sich bei den simultanen Transformationen (4) wie folgt:

$$\Gamma^{i'}_{j'\alpha'} = \{\Gamma^i_{j\alpha} X^{i'}_i X^j_{j'} - X^{i'}_{ij} X^i_{j'} p^j_{\alpha}\} U^{\alpha}_{\alpha'} . \tag{16}$$

Um die Grösse $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ aus $H^i_{\alpha_{(3)}}$ und ihren Ableitungen nach $p^j_{\beta_{(2)}}$ zu bestimmen, betrachten wir im Folgenden die Grösse $H^i_{\alpha\beta\beta_1;\,i}{}^{(\beta_1\gamma)}$. Wir haben sogleich die Transformationsformel dieser Grösse aus (8)

$$(17)\quad H^{i'}_{\alpha'\beta'\beta'_1;i'}{}^{(\beta'_1\gamma')} = H^{i}_{\alpha\beta\beta_1;i}{}^{(\beta_1\gamma)} U^{\alpha}_{\alpha'} U^{\beta}_{\beta'} U^{\gamma'}_{\gamma} - n\delta^{\gamma'}_{\alpha'} U^{\alpha}_{\beta'\delta'} U^{\delta'}_{\alpha} - n\delta^{\gamma'}_{\beta'} U^{\alpha}_{\alpha'\rho'} U^{\rho'}_{\alpha}$$

$$- n U^{\alpha}_{\alpha'\beta'} U^{\gamma'}_{\alpha} - \frac{1}{2}(K+2) X^{i'}_{ij} X^{i}_{i'} p^{j}_{\delta} (\delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\delta}_{\alpha} + \delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\delta}_{\beta}) U^{\alpha}_{\alpha'} U^{\beta}_{\beta'} U^{\gamma'}_{\gamma}\,.$$

Mit Hilfe von (13), (16) und (17) können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. Die $\frac{1}{2}K^2(K+1)$ *Grössen*

$$(18)\qquad G^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}\{(K+2)\Gamma^{i}_{i(\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta)} - 2H^{i}_{\alpha\beta\delta;i}{}^{(\delta\gamma)}\} - 2\delta^{\gamma}_{(\alpha} L_{\beta)}$$

transformieren sich bei den simultanen Transformationen (4) wie folgt:

$$(19)\qquad G^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = \{G^{\gamma}_{\alpha\beta} U^{\alpha}_{\alpha'} U^{\beta}_{\beta'} + U^{\gamma}_{\alpha'\beta'}\} U^{\gamma'}_{\gamma}\,,$$

und sind symmetrisch in bezug auf α *und* β.

Es ist zu beachten, dass die aus $H^{i}_{\alpha_{(3)}}$ abgeleiteten Grössen $\Gamma^{i}_{j\alpha}$, $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ jede nur die ein- und zweimaligen Ableitungen von $H^{i}_{\alpha_{(3)}}$ nach den höchsten Ableitungen $p^{j}_{\beta_{(2)}}$ enthalten; daher wird die Übertragung längs der Integralfläche von (3) für beliebigen Affinor $v^{i\alpha}$ durch (7) vollständig bestimmt. Für anderen Affinor höherer Stufe wird die kovariante Ableitung längs der Integralfläche von (3) wie üblich definiert. Die oben erklärten Tatsachen ergeben zur Folge den folgenden Satz.

Satz 3. Es sei ein System der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung (3) gegeben. Dann bestimmt sich in $F^{(2)}_n$ *eine intrinsike Übertragung (7) längs der Integralfläche von (3), wenn die Matrix* (A^{α}_{β}) *den Rang K hat.*

Wir können auch die *intrinsike Grundübertragung* geben, und daraus die *intrinsiken kovarianten Ableitungen* erhalten. Wir werden diese Theorie an anderer Stelle noch ausführlicher behandeln.