PAPERS COMMUNICATED

30. Über die Zerlegung der Charaktere der alternierenden Gruppe.

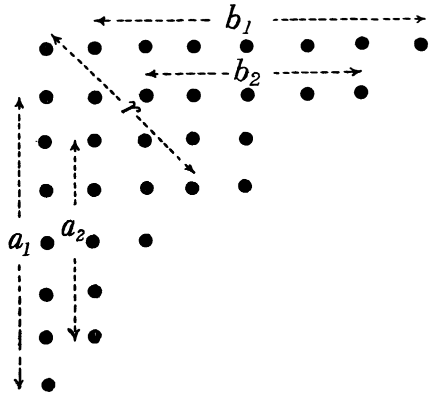
Von Kôiti KONDÔ.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1940.)

1. Es ist wohl bekannt, dass die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vom Grade n durch die zur Partition von $n: n=f_1+f_2+\cdots+f_n$ $(f_1 \geqq f_2 \geqq \cdots \geqq f_n \geqq 0)$, gehörigen Young-Diagramme gekennzeichnet werden.[1] In seinen Abhandlungen „Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe," Berliner Sitzungsber. (1900) und „Über die Charaktere der alternierenden Gruppe" ebd. (1901) (im folgenden mit S. bzw. A. zitiert) hat schon G. Frobenius die Charaktere der symmetrischen bzw. alternierenden Gruppe explizit angegeben. In S. bezeichnet er einen einfachen Charakter von $\mathfrak{S}_n$ mit dem Symbol $\chi\begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots a_r \\ b_1, b_2, \cdots b_r \end{pmatrix}$. Bzgl. der Zahlen a_i und b_i gelten dabei $a_1 > a_2 > \cdots > a_r \geqq 0$, $b_1 > b_2 > \cdots > b_r \geqq 0$ und $\sum_1^r a_i + \sum_1^r b_i = n-r$, und der Zusammenhang zwischen diesen Zahlen a_i und b_i und dem Young-Diagramm ist durch das folgende Schema angezeigt:[2]

$$\chi\begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_r \\ b_1, b_2, \cdots, b_r \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



(D)

Ist nämlich e der zum Diagramme (D) gehörige Young-Symmetrieoperator[3] im Gruppenring ρ von $\mathfrak{S}_n$, so ist der Charakter derjenigen irreduziblen Darstellung, die durch den einfachen Darstellungsmodul ρe vermittelt wird, gleich $\chi\begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_r \\ b_1, b_2, \cdots, b_r \end{pmatrix}$.

---

1) B. L. Van der Waerden: Moderne Algebra II, (1931), S. 203–207, od. H. Weyl: The Classical Groups (1939), S. 119–127. (Im folgenden mit C. G. zitiert.)

2) G. Frobenius: „Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe," Berliner Sitzungsber. (1903), S. 347.

3) H. Weyl: C. G. S. 119.

Um dies zu beweisen, braucht man nur folgende Tatsache nachzuweisen:[1]

Die Anzahl der Ziffern in der ersten, zweiten, ..., Zeile vom Diagramme (D) $\mathfrak{S}(f_1, f_2, \dots)$: *sei resp.* $f_1, f_2, \dots$. *Wird* $\lambda_1=(n-1)+f_1$, $\lambda_2=(n-2)+f_2, \dots, \lambda_n=0+f_n$ *gesetzt, dann sind unter* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *die Zahlen* $n+b_1, n+b_2, \dots, n+b_r$ *grösser als n und die Zahlen* $n-1-a_{r+1}, \dots, n-1-a_n$ *kleiner als n.*[2]

Dies lässt sich aber rein kombinatorisch ohne besondere Mühe beweisen.

In der vorliegenden Note soll die Zerlegung der Charaktere der alterdierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$ vom Grade n in die einfachen Bestandteile in $\mathfrak{A}_{n-1}$ hergeleitet werden. Das Zerlegungsgesetz der Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ lautet nach Weyl so:[3]

Die irreduzible Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ mit dem Diagramm $\mathfrak{S}(f_1, f_2, \dots)$ zerfällt, wenn man sich innerhalb $\mathfrak{S}_n$ auf die Untergruppe der Permutationen $\mathfrak{S}_{n-1}$ von $n-1$ Ziffern beschränkt, in diejenigen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}_{n-1}$, welche zu den Diagrammen gehören

$$\begin{array}{l} \mathfrak{S}(f_1-1, f_2, f_3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots); \\ \mathfrak{S}(f_1, f_2-1, f_3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots: \end{array}$$

die Diagramme, in denen die Zeilenlängen nicht absteigend geordnet erscheinen, sind jedoch fortzulassen.

Die Charaktere von $\mathfrak{A}_n$ lassen sich zum grossen Teile aus denen von $\mathfrak{S}_n$ ableiten und zwei Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ $\chi\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{pmatrix}$ und $\chi\begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_r \\ a_1, a_2, \dots, a_r \end{pmatrix}$ heissen nach Frobenius mit einander *assoziiert.* Der Charakter $\chi\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ a_1, a_2, \dots, a_r \end{pmatrix}$ heisst insbesondere *selbstassoziiert.* Derselbe wird dem *selbstassoziierten Diagramme* zugeordnet, das bezüglich der südöstlichen Richtung symmetrisch ist.

Der selbstassoziierte Charakter (Diagramm) $\chi\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ a_1, a_2, \dots, a_r \end{pmatrix}$ mit $a_r=0$ heisst *von erster Art* und der sonstige selbstassoziierte (Diagramm) *von zweiter Art.*

Das Zerlegungsgesetz der Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ lautet für das Frobeniussche Symbol folgendermassen:[4]

$$\chi_\rho\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{pmatrix} = \sum_i{}' \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_i-1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_i, \dots, b_r \end{pmatrix}$$
$$+\sum_i{}' \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_i, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_i-1, \dots, b_r \end{pmatrix} + \left\{\chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_{r-1} \\ b_1, \dots, b_{r-1} \end{pmatrix}\right\}.$$

1) Vgl. H. Weyl: C. G. S. 212.

2) $a_{r+1}, \dots, a_n$ sind diejenige Zahlen, die mit $a_1, a_2, \dots, a_r$ zusammen eine Permutation von $0, 1, 2, \dots, n-1$ bilden.

3) H. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik (1931), S. 342, od. C. G. S. 214-215.

4) ρ bedeutet eine bestimmte Klasse von $\mathfrak{S}_n$, die mindestens einen Zyklus der Länge 1 enthält und ρ' diejenige Klasse von $\mathfrak{S}_{n-1}$, welche diesen Zyklus nicht enthält.

Dabei muss man diejenigen Symbole fortlassen, welche als Charaktere von $\mathfrak{S}_{n-1}$ sinnlos sind. Das letzte Glied in den geschweiften Klammern kommt nur dann vor, wenn $a_r = b_r = 0$ ist.

Nunmehr soll das Zerlegungsgesetz der Charaktere von $\mathfrak{A}_n$ auf dem durch das folgende Schema angezeigten Weg untersucht werden:[1]

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}_n \arrow[r, dotted] & \mathfrak{S}_{n-1} \arrow[d, dotted] \\ \mathfrak{A}_n \arrow[u, dotted] \arrow[r] & \mathfrak{A}_{n-1} \end{tikzcd}$$

2. Es bezeichne ρ stets eine bestimmte Klasse von $\mathfrak{A}_n$, welche mindestens einen Zyklus der Länge 1 enthält und mit ρ' die Klasse von $\mathfrak{A}_{n-1}$, welche diesen Zyklus nicht enthält. Ebenso bezeichne ρ^* bzw. ρ'^* diejenige Klasse von $\mathfrak{S}_n$ bzw. $\mathfrak{S}_{n-1}$, welche alle Permutationen von ρ bzw. ρ' in sich enthält und die Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{S}_{n-1}$ seien mit $\chi^*_{\rho*}$ bzw. $\chi^*_{\rho'*}$ bezeichnet.

I. Wenn $\chi^*_{\rho*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix}$ ein nicht selbstassoziierter Charakter ist, so ist nach Frobenius für einen Charaktere χ_ρ von $\mathfrak{A}_n$

$$\chi_\rho\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix} = \chi^*_{\rho*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix}.$$

Nach Weyl gilt

$$\chi^*_{\rho*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix} = \sum_i{}' \chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}$$
$$+ \sum_i{}' \chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i-1, \cdots, b_r \end{pmatrix} + \left\{ \chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ b_1, \cdots, b_{r-1} \end{pmatrix} \right\}.\text{[2]}$$

Ist $\chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}$ nicht selbstassoziiert, so ist

$$\chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix} = \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}.$$

Ist dagegen $\chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}$ selbstassoziiert, so ist

$$\chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix} = \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}_+$$
$$+ \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}_-.\text{[3]}$$

Daher ist im allgemeinen

$$\chi_\rho\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix} = \sum_i{}' \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_r \end{pmatrix}$$
$$+ \sum_i{}' \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_i-1, \cdots, b_r \end{pmatrix} + \left\{ \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ b_1, \cdots, b_{r-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

1) Für seine vielen Ratschläge bei dieser Untersuchung bin Ich Herrn Y. Kawada herzlich zu verdanken verpflichtet.

2) Es ist $(\rho^{*\prime})' = (\rho')^*$.

3) Bezüglich des angehängten Zeichens + oder − vergleiche man A., S. 309.

Wenn aber auf der rechten Seite ein Symbol $\chi_{\rho'}$ sinnlos ist, so soll, statt $\chi_{\rho'}$, $\chi_{\rho'}(\quad)_{+}+\chi_{\rho'}(\quad)_{-}$ gesetzt werden.

II. Wenn $\chi^{*}_{\rho*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}$ ein selbstassoziierter Charakter zweiter Art ist, so ist $a_r \neq 0$ und

$$\chi_{\rho}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}_{\pm}=\frac{1}{2}\chi^{*}_{\rho*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}.$$

Denn, ist σ diejenige Klasse, welche aus den Permutationen von r Zyklen von je $c_1=2a_1+1$, $c_2=2a_2+1, \cdots, c_r=2a_r+1$ Symbolen besteht, so ist wegen $a_r \neq 0$ $\rho \neq \sigma$.

Andererseits ist nach Weyl

$$\begin{aligned}\chi^{*}_{\rho*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}=&\left[\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}+\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \quad \cdots, \quad a_r\\ a_1-1, \cdots, a_r\end{pmatrix}\right]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\left[\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r-1\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}+\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \quad \cdots, \quad a_r\\ a_1, \cdots, a_r-1\end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

Dabei ist (S., S. 527.)

$$\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_i, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}=\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \quad \cdots, \quad a_i, \quad \cdots, \quad a_r\\ a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r\end{pmatrix}.$$

$\chi^{*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_i, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}$ ist natürlich nicht selbstassoziiert, sodass

$$\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_i, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}=\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_i, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich

$$\chi_{\rho}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}_{\pm}=\sum_{i}{}' \chi_{\rho'}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_i, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}.$$

III. Wenn $\chi^{*}_{\rho*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}$ ein selbstassoziierter Charakter erster Art ist, so ist $a_r=0$ und

$$\begin{aligned}\chi^{*}_{\rho*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}=&\left[\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1-1, \cdots, a_r\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}+\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \quad \cdots, \quad a_r\\ a_1-1, \cdots, a_r\end{pmatrix}\right]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\left[\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r-1\\ a_1, \quad \cdots, \quad a_r\end{pmatrix}+\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \quad \cdots, \quad a_r\\ a_1, \cdots, a_r-1\end{pmatrix}\right]\\ &+\chi^{*}_{\rho'*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_{r-1}\\ a_1, \cdots, a_{r-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Stimmt ρ^{*} mit derjenigen Klasse σ^{*} überein, welche aus r Zyklen von je $c_1=2a_1+1, \cdots, c_r=2a_r+1$ Symbolen besteht, dann ist (A., S. 310.)

$$\chi_{\sigma}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}_{+}=\frac{1}{2}(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon p}), \quad \chi_{\sigma}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}_{-}=\frac{1}{2}(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon p}),$$

wo $p=c_1 c_2 \cdots c_r$, $\varepsilon=(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ ist. Es gilt natürlich

$$\chi^{*}_{\sigma*}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}=\chi_{\sigma}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}_{+}+\chi_{\sigma}\begin{pmatrix}a_1, \cdots, a_r\\ a_1, \cdots, a_r\end{pmatrix}_{-}.$$

Nach Weyl ist ferner

$$\chi^*_{\sigma*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_r \end{pmatrix} = \sum_i{}' \left[\chi^*_{\sigma'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \end{pmatrix} + \chi^*_{\sigma'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \end{pmatrix} \right]$$

$$+\chi^*_{\sigma'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Jedoch ist dabei

$$\chi^*_{\sigma'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \end{pmatrix} = \chi^*_{\sigma'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \end{pmatrix} = 0$$ [1]

und

$$\chi^*_{\sigma'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix} = \chi_{\sigma'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}_+ + \chi_{\sigma'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}_-.$$

Wegen $c_r=1$ ist dabei

$$\chi_{\sigma'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}_+ = \frac{1}{2}(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon p}), \quad \chi_{\sigma'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}_- = \frac{1}{2}(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon p}).$$

Ist $\rho^* \neq \sigma^*$, so ist

$$\chi_\rho\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_r \end{pmatrix}_\pm = \frac{1}{2}\chi^*_{\rho*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_r \end{pmatrix}, \quad \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}_\pm = \frac{1}{2}\chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \end{pmatrix} = \chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \end{pmatrix}$$

$$= \chi^*_{\rho'*}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich schliesslich

$$\chi_\rho\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_r \end{pmatrix}_\pm = \sum_i{}' \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_i-1, \cdots, a_r \\ a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \end{pmatrix} + \chi_{\rho'}\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_{r-1} \\ a_1, \cdots, a_{r-1} \end{pmatrix}_\pm.$$

Durch I, II, III ist die Zerlegung der Charaktere von $\mathfrak{A}_n$ in die von $\mathfrak{A}_{n-1}$ vollständig angegeben.

---

1) Ist die Anzahl s der Zyklen, aus denen die Permutationen der Klasse ρ bestehen, kleiner als der Rang r des Symbols $\chi^*\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix}$, so ist $\chi^*_\rho\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_r \end{pmatrix}=0$. (S., S. 530.)