39. Über die Differenzierbarkeit der einparametrigen Untergruppe Liescher Gruppen.

Von Kunihiko KODAIRA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 13, 1940.)

Im Folgenden soll ein einfacher Beweis für den bekannten Satz[1] gegeben werden, dass jede stetige einparametrige Untergruppe einer Lieschen Gruppe differenzierbar (in bezug auf den Parameter) ist.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine n-parametrige Liesche Gruppe. Die Elemente von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $x, y, \dots$; ihre Koordinaten mit $x^j, y^j, \dots$ $(j=1, 2, \dots, n)$. Dem Einselement e von $\mathfrak{G}$ soll wie üblich der Koordinatenanfang $(0, \dots, 0)$ entsprechen.

$f^j(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)=f^j(x, y)=(xy)^j$ sei die Funktion, die die j-te Koordinate des Produktes xy angibt. f^j ist also stetig differenzierbar in bezug auf $(x, y)=(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$.

Wir setzen nun

$$g^j_k(x, y)=\frac{1}{x^k}\{f^j(0, \dots, 0, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n; y)$$
$$-f^j(0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n; y)\},$$

sodass die Identität:

$$f^j(x, y)-y^j=\sum_{k=1}^{n} x^k g^j_k(x, y) \tag{1}$$

besteht. g^j_k ist stetig, also auch gleichmässig stetig in (x, y), weil $g^j_k(x, y)=\frac{\partial f^j}{\partial x^k}(0, \dots, 0, \theta x^k, x^{k+1}, \dots, x^n; y)$, $0\leq\theta\leq 1$, und $\frac{\partial f^j}{\partial x^k}$ stetig ist. Ferner ist offenbar $g^j_k(x, e)=\delta^j_k$. Für $y\to e$ strebt also $g^j_k(x, y)$ gleichmässig nach δ^j_k.

Nun sei $x(t)$ $(-t_0<t<t_0)$ eine stetige, einparametrige Untergruppe von $\mathfrak{G}$: $x(t+s)=x(t)\,x(s)$. Zu zeigen ist, dass die Funktion $x^j(t)$ in t differenzierbar ist. Dabei genügt es offenbar, diese Differenzierbarkeit an der Stelle $t=0$, also die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{t\to 0}\frac{x^j(t)}{t}$ nachzuweisen, denn es ist $x^j(t+s)=f^j\big(x(t), x(s)\big)$ und f^j ist differenzierbar.

Aus (1) folgt nun

$$x^j(t+s)-x^j(s)=\sum_{k=1}^{n} x^k(t)\, g^j_k\big(x(t), x(s)\big).$$

Integriert man die beiden Seiten in bezug auf s von 0 bis ε, erhält man

$$\int_0^\varepsilon x^j(t+s)\,ds-\int_0^\varepsilon x^j(s)\,ds=\sum_{k=1}^{n} x^k(t)\int_0^\varepsilon g^j_k\big(x(t), x(s)\big)\,ds.$$

1) Siehe z. B. Pontrjagin: Topological groups, Chapter VI, § 39, Theorem 48.

Einfacheitshalber setzen wir nun: $z^j(t, \varepsilon)$ = die linke Seite dieser Gleichung, und $a^j_k(t, \varepsilon)=\int_0^\varepsilon g^j_k\big(x(t), x(s)\big)ds$, sodass diese Gleichung die Gestalt bekommt:

$$z^j(t, \varepsilon)=\sum_{k=1}^{n} a^j_k(t, \varepsilon)\, x^k(t). \tag{2}$$

Nun gilt

$$z^j(t, \varepsilon)=\int_\varepsilon^{\varepsilon+t} x^j(s)\,ds-\int_0^t x^j(s)\,ds,$$

woraus folgt, da $x^j(s)$ stetig ist,

$$\lim_{t\to 0}\frac{z^j(t, \varepsilon)}{t}=x^j(\varepsilon). \tag{3}$$

Andererseits strebt, wegen der erwähnten Eigenschaft von $g^j_k(x, y)$, $\dfrac{a^j_k(t, \varepsilon)}{\varepsilon}$ gleichmässig nach δ^j_k, wenn $\varepsilon\to 0$. Für ein genügend kleines ε (und für einen beliebigen Wert von t) besitzt also die Matrix $\left(\dfrac{a^j_k(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ eine Inverse, die wir mit $\big(b^k_j(t, \varepsilon)\big)$ bezeichnen. $b^k_j(t, \varepsilon)$ ist offenbar stetig in t, ε.

Für ein solches ε können wir also (2) in bezug auf $x^k(t)$ auflösen:

$$x^k(t)=\sum_{j=1}^{n} b^k_j(t, \varepsilon)\,\frac{z^j(t, \varepsilon)}{\varepsilon},$$

und nach (3) ist der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0}\frac{x^k(t)}{t}=\sum_{j=1}^{n} b^k_j(0, \varepsilon)\,\frac{x^j(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

vorhanden, w. z. b. w.