62. Sur les projections dans certains espaces du type (*B*).

Par Hitosi KOMATUZAKI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., July 12, 1940.)

M. S. Banach[1] a posé le problème suivant: existe-t-il dans un espace H donné du type (B) pour tout sous-ensemble linéaire fermé $\mathfrak{M}$ de l'espace H sous-ensemble linéaire fermé $\mathfrak{N}$ tel que tout élément f de l'espace H se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $f=g+h$ où $g\in\mathfrak{M}$, $h\in\mathfrak{N}$? Ce problème été résolu affirmativement pour l'espace $(L^{(2)})$ et négativement pour les espaces (L), (l), $(L^{(p)})$ $2\neq p>1$ et $(l^{(p)})$ $2\neq p>1$.[2] Dans cette note, nous démontrerons qu'il est résolu négativement pour les espaces (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ où $p=1, 2, \dots$ et (c_0).

1. Considérons l'ensemble $\mathfrak{E}$ de toutes les fonctions $x_r(t)$ définies comme il suit:

$$
(1) \qquad x_r(t)\begin{cases} =r_i & \text{pour } \dfrac{i-1}{m}\leqq t<\dfrac{i}{m} \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \\ =r_m & \text{pour } \dfrac{m-1}{m}\leqq t\leqq 1, \end{cases}
$$

où r_i et r_m sont des nombres rationnels arbitraires et m est un nombre naturel quelconque. A toute couple ordonnée x, y des fonctions de cet ensemble, nous faisons correspondre un nombre, dit distance entre x et y:

$$
(2) \qquad (x, y)=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|.
$$

Cet ensemble $\mathfrak{E}$ devient alors un espace métrique. Nous désignons maintenant par (C^*) l'espace obtenu en complétant celui-ci par cette métrique. Tout élément de l'espace (C^*) est donné comme la limite d'une suite convergente uniformément des fonctions de $\mathfrak{E}$ définies dans l'intervalle $0\leqq t\leqq 1$. L'ensemble $\mathfrak{E}$ étant dénombrable, l'espace (C^*) est séparable, et complet par définition même. De plus, la définie par l'égalité (2) montre bien que pour que un espace (C^*) est de type (B). Toute fonction continue définie dans l'intervelle $0\leqq t\leqq 1$ peut être approchée uniformément par les fonctions de $\mathfrak{E}$ et, par suite, appartient à l'espace (C^*). Or, comme la métrique définie par l'égalité (2) est identique à celle de l'espace (C), nous pouvons dire que l'espace (C) est contenu parfaitement dans l'espace (C^*).

Rappelons quelques définitions sur les notions que nous employerons plusieurs fois dans la suite. L'opération linéaire bornée E telle que $EH=\mathfrak{M}$ et $E^2=E$ est appelée la projection de l'espace H sur le sous-espace $\mathfrak{M}$. $H\simeq H'$ désigne que l'espace H est équivalent[3] à l'espace

1) Cf. S. Banach; Théorie des opérations liéaires: Warszawa. 1932. p. 244-245.

2) Cf. F. J. Murray; On complementary manifolds and projections in spaces (L_p) and (l_p). Trans. Amer. M. S. 41. (1939).

3) Cf. loc. cit. 1). p. 180. § 6.

H'. Désignons par (c_n) l'espace des suites ordonnées $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ des n-nombres réels, où la norme de cet espace est définie par $\| \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \| = \max_{i=1,2,\ldots,n} |a_i|$. Par le lemme 1.1 d'un mémoire de M. F. J. Murray[1] notre problème est équivalent à la suivante:

(*) *Soient* (Λ) *un des espaces* (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ *où* $p=1, 2, \ldots$ *et* (c_0) *et* $\mathfrak{M}$ *un sous-espace linéaire fermé arbitraire de* (Λ), *existe-t-il une projection de l'espace* (Λ) *sur* $\mathfrak{M}$?

2. Nous montrerons d'abord que si le problème (*) est résolu négativement pour l'espace (C^*), il est résolu aussi négativement pour l'espace (c). Pour cela, nous allons commencer de démontrer des lemmes suivants.

Définition 1. Nous définissons $(c_{m_1}) \times (c_{m_2}) \times \cdots \times (c_{m_n})$, où n et m_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont les nombres finis ou infinis, comme il suit. Le 1$^{\text{er}}$ cas: $n=1, 2, \ldots$ et $m_i=1, 2, \ldots$. Il désigne l'espace de toutes les suites ordonnées $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, où $f_i \in (c_{m_i})$, dont la norme est définie par $\| \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \| = \max_{i=1,2,\ldots,n} \|f_i\|$. Le 2$^{\text{e}}$ cas: $n=1, 2, \ldots$ et $m_i=\infty$ (pour certain i). Il désigne l'espace de toutes suites ordonnées $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ telles que la suite $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{li-l+1}, \cdots, a_{i1}, \cdots\}$[2] obtenue en rangeant par la méthode diagonale les éléments $\{a_{ij}\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ de f_i $(i=1, 2, \ldots)$ converge vers un nombre réel et que la norme de celui-ci soit définie par $\| \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \| = \max_{i=1,2,\ldots,n} \|f_i\|$. Le 3$^{\text{e}}$ cas: $n=\infty$ et $m_i=1, 2, \ldots, \infty$. Il désigne, de même que le 2$^{\text{e}}$ cas, l'espace de toutes suites ordonnées $\{f_1, f_2, \cdots\}$ telles que la suite obtenue en rangeant de même que le cas précédent tous les éléments de f_i $(i=1, 2, \ldots)$ converge vers un nombre réel et que la norme de celui-ci soit définie par $\| \{f_1, f_2, \cdots\} \| = \text{borne sup}_{i=1,2,\ldots} \|f_i\|$.

Lemme 1. *1°.* $(c_{m_1}) \times (c_{m_2}) \times \cdots \times (c_{m_n}) \simeq (c_m)$ *où* $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, $n=1, 2, \ldots$, $m_i=1, 2, \ldots, \infty$, *et* $(c_\infty)=(c)$. *2°.* $(c_{m_1}) \times (c_{m_2}) \times \cdots \simeq (c)$ *où* $m_i = 1, 2, \ldots, \infty$.

Démonstration de 1°. Si $m_i=1, 2, \cdots$, nous faisons correspondre pour tout élément $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ de l'espace $(c_{m_1}) \times (c_{m_2}) \times \cdots \times (c_{m_n})$ un élément $f=\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m_1}, a_{21}, \cdots, a_{nm_n}\}$ où $f_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im_i}\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ de l'espace (c_{m_i}). Nous avons alors $\| \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \| = \max_{i=1,2,\ldots,n} \|f_i\| = \max_{i,j} |a_{ij}| = \|f\|$, et donc cette correspondance est biunivoque et laisse invariant la norme, par suite, nous avons la relation 1° pour ce cas. Si $m_i=\infty$ (pour certain i), nous faisons correspondre pour tout élément $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ de celui-là un élément $f=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots, a_{1i}, a_{2i-1}, \cdots, a_{i1}, \ldots\}$, où $f_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im_i}\}$, de celui-ci. Nous avons alors $\| \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \| = \max_{i=1,2,\ldots,n} \|f_i\| = \text{borne sup}_{i,j} |a_{ij}| = \|f\|$ et donc cette cor-

1) Cf. F. J. Murray; Relations between certain problems of Banach. Studia Math. Tome VI 1936. p. 199.

2) En faisant des modifications nécessaires, dans les cas où quelques a_{ij} ne se montrent pas — cela a lieu pour m finis.

respondance est biunivoque et ne change pas la norme. D'où, la formale 1° a lieu également pour ce cas. Démonstration de 2°. Nous faisons correspondre, d'une manière analogue au cas précédent, pour tout élément $\{f_1, f_2, \cdots\}$ de l'espace $(c_{m_1})\times(c_{m_2})\times\cdots$ un élément $f=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{i1}, \cdots\}$ de l'espace (c). Nous avons alors $\|\{f_1, f_2, \cdots\}\| = \underset{i=1,2,\dots}{\text{borne sup}} \|f_i\| = \underset{i,j}{\text{borne sup}} |a_{ij}| = \|f\|$. Cette correspondance est biunivoque et isométrique. D'où, 2° est aussi établi.

Définition 2. Si $\mathfrak{M}$ est un sous-espace linéaire fermé d'un espace H, alors, $C(\mathfrak{M})$ et $\bar{C}(H)$ sont définis comme suivants:

$$C(\mathfrak{M})\begin{cases} =\infty \text{ quand il n'existe aucune projection de l'espace } H \text{ sur } \mathfrak{M}. \\ =\text{borne inf } \|E\| \text{ pour toute projection } E \text{ telle qu'on ait } EH=\mathfrak{M}, \text{ quand il existe au moins une de telles projections.}\end{cases}$$

$$\bar{C}(H) = \underset{\mathfrak{M}<H}{\text{borne sup}} \{(C(\mathfrak{M})\}.$$

Puisque les lemmes 2.1–2.3, 3.2–3.4 demontrés dans l'article cité de M. Murray[1] sont établis pour tout espace de type (B), nous avons le

Théorème I. *Il existe un sous-ensemble linéaire fermé $\mathfrak{M}$ dans l'espace (c) tel que $\bar{C}(c)=C(\mathfrak{M})$. Nous avons de plus* $1=\bar{C}(c_1)\leqq\bar{C}(c_2)\leqq\cdots\leqq\bar{C}(c_\infty)=\bar{C}(c)$.

3. Définition 3. Etant donné un espace H de type (B) à m-dimensions, nous posons pour tout sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{M}$ à n-dimensions, où $n\leqq m$, de l'espace H, $\bar{C}_n(H)=\underset{\mathfrak{M}<H}{\text{borne sup}} \{\bar{C}(\mathfrak{M})\}$.

Lemme 2. $\bar{C}_n(C^*)\leqq \underset{m=1,2,3,\dots}{\textit{borne sup}} \{\bar{C}_n(c_m)\}$.

Démonstration. Posons $k_n=\underset{m=1,2,\dots}{\text{borne sup}} \{\bar{C}_n(c_m)\}$. Lorsque $k_n=\infty$, notre lemme est évidemment etabli et par conséquent nous admetions que $k_n<\infty$. Soient ε un nombre arbitraire qui remplit à la fois les conditions $\big(\varepsilon/(1-\varepsilon)\big)\,k_n<1$ et $0<\varepsilon<1$ et $\mathfrak{M}$ un sous-espace linéaire fermé à n-dimensions arbitraire de l'espace (C^*). Prenons les n-éléments $f_1, f_2, \cdots, f_n$ indépendants linéairement de $\mathfrak{M}$, si $\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\|=1$ où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des nombres réels, en vertu de lemmes 4.2 et 4.3 de l'article cité de M. Murray,[2] il existe un nombre naturel m et les fonctions $h_1, h_2, \dots, h_n$ indépendantes linéairement telles qu'elles soient une constante sur chacun des intervalles $\frac{i-1}{m}\leqq t<\frac{i}{m}$ $(i=1, 2, \dots, m-1)$ et $\frac{m-1}{m}\leqq t\leqq 1$ et que $\|\sum_{i=1}^{n} a_i(f_i-h_i)\|<\varepsilon$. Soit $\mathfrak{M}_0$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des fonctions précédentes. D'autre part, puisque les fonctions:

1), 2) Cf. loc. cit. 1) de la page 275.

$$y_i(t)\begin{cases} =1 \text{ pour } \dfrac{i-1}{m}\leqq t<\dfrac{i}{m} \quad (i=1,2,\dots,m-1) \text{ et } \dfrac{m-1}{m}\leqq t\leqq 1, \\ =0 \text{ pour } 0\leqq t<\dfrac{i-1}{m} \text{ et } \dfrac{i}{m}\leqq t\leqq 1 \quad (i=1,2,\dots,m), \end{cases}$$

sont indépendantes linéairement, pour un sous-espace $\mathfrak{N}$ linéaire fermé donné comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des fonctions $\{y_i\}$, nous avons les relations: $\mathfrak{M}_0\subset\mathfrak{N}\subset(C^*)$, $\mathfrak{M}\simeq(c_n)$ et $\mathfrak{N}\simeq(c_m)$. Il existe donc pour tout $\eta>0$ une projection E_0 de $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}_0$ telle que $\|E_0\|\leqq\bar{C}_n(c_m)+\eta\leqq k_n+\eta$. Nous posons maintenant pour tout élément f de l'espace (C^*)

$$Ff=\sum_{i=1}^m m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s)ds\cdot y_i(t).$$

Si $f\in\mathfrak{N}$, f peut être désigné comme la somme $\sum_{j=1}^m \xi_j y_j(t)$ et

$$Ff=\sum_{i=1}^m m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}\Big(\sum_{j=1}^m \xi_j y_j(s)\Big)ds\cdot y_i(t)=\sum_{i=1}^m m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}\xi_i ds\cdot y_i(t)=\sum_{i=1}^m \xi_i y_i(t)=f,$$

d'où, $F^2=F$. De plus, nous avons

$$\|Ff\|=\max_{0\leq t\leq 1}\left|\sum_{i=1}^m m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s)ds\cdot y_i(t)\right|\leqq\max_{i=1,2,\dots,m}\Big(m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}|f(s)|\,ds\Big)=\|f\|$$

et donc $\|F\|\leqq 1$. D'autre part, pour l'élément $f\equiv 1$ $\|f\|=1=\|Ff\|\leqq\|F\|\cdot\|f\|$ d'où, $\|F\|\geqq 1$, ce qui entraîne $\|F\|=1$. Par conséquent, la transformation F est une projection de (C^*) sur $\mathfrak{N}$ telle que $\|F\|=1$. Ensuite, nous considérerons la transformation E_0F, il est .alors facile de voir que $E_0F(C^*)=E_0\mathfrak{N}=\mathfrak{M}_0$ et si $f\in\mathfrak{M}_0$, nous avons $E_0Ff=E_0f=f$ ainsi que $(E_0F)^2=E_0F$. La transformation E_0F est donc la projection de (C^*) sur $\mathfrak{M}_0$, d'où, $C(\mathfrak{M}_0)\leqq\|E_0F\|\leqq\|E_0\|\cdot\|F\|=\|E_0\|\leqq k_n+\eta$. Ici, η étant arbitraire, $C(\mathfrak{M}_0)\leqq k_n<(1-\varepsilon)/\varepsilon$ d'où, nous avons $C(\mathfrak{M}_0)\cdot\varepsilon/(1-\varepsilon)<1$. Selon le lemme 5.1 de l'articie cité de M. Murray,[1] nous avons l'inégalité suivante:

$$C(\mathfrak{M})\leqq C(\mathfrak{M}_0)\frac{1+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C(\mathfrak{M}_0)}{1-\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C(\mathfrak{M}_0)}\leqq k_n\frac{1+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n}{1-\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n},$$

ε étant arbitraire, nous obtenons $C(\mathfrak{M})\leqq k_n$. Or, comme $\mathfrak{M}$ est un sous-espace linéaire fermé à n-dimensions arbitraire, nous avons $\bar{C}_n(C^*)\leqq k_n$. C. Q. F. D.

Nous avons, d'après le lemme 2, un énoncé qu'on obtient en

---

1) Cf. loc. cit. 1) de la page 275.

remplaçant dans le lemme 7.1 de l'article cité de M. Murray[1] les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ respectivement par (C^*) et (c): c. à d.

$$\bar{C}(C^*) \leqq \underset{n=1,2,\ldots}{\text{borne sup}} \{\bar{C}(c_n)\}.$$

En vertu de cette inégalité et le théorème I, nous avons le

Théorème II. $\quad \bar{C}(C^*) \leqq \bar{C}(c)$.

4. Si notre problème est résolu négativement pour l'espace (C^*), selon le théorème II $\infty = \bar{C}(C^*) \leqq \bar{C}(c)$ c. à d. $\bar{C}(c) = \infty$ et d'autre part en vertu du théorème I, il existe un sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{M}$ dans l'espace (c) tel que $\bar{C}(c) = C(\mathfrak{M}) = \infty$, ce qui montre qu'il n'existe aucune projection de (c) sur certain sous-espace linéaire fermé de (c), c. à d. notre problème est résolu négativement pour l'espace (c). Cependant, *nous pouvons démontrer que notre problème est résolu négativement pour les espaces* (C) *et* (C^*). En effet, puisque l'espace (L) est équivalent à un sous-espace de (C),[2] nous posons un sous-espace linéaire fermé $(\mathfrak{L})$ de l'espace (C) tel que $(\mathfrak{L}) \simeq (L)$. Comme notre problème est résolu négativement pour l'espace (L),[3] cela vient aussi pour l'espace $(\mathfrak{L})$. Or, tout sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{M}$ de l'espace $(\mathfrak{L})$ est fermé aussi dans l'espace (C) et donc, si notre problème est résolu affirmativement pour l'espace (C), pour tout sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{M}$ de l'espace $(\mathfrak{L})$ il existe un sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{N}$ de l'espace (C) tel que pour tout élément f de l'espace (C) se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $f = g + h$ où $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$. En particulier la relation $f \in (\mathfrak{L})$ entraîne $g \in (\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{M}$ et $h \in (\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{N}$. Mais, puisque $(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont des sous-espaces linéaires fermés dans (C), les espaces $(\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{M}$ et $(\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{N}$ le sont aussi, ce qui est contradictoire à l'hypothèse. Par conséquent notre problème est résolu négativement pour l'espace (C). De même, il est résolu aussi négativement pour l'espace (C^*). Par conséquent, il est résolu négativement pour l'espace (c).

Notre problème est résolu négativement aussi pour les espaces (M) *et* (m).

En effet, tout élément de l'espace (C) est contenu dans l'espace (M) et la métrique pour toutes les fonctions continues de l'espace (M) est définie de même que l'espace (C) et donc, nous pouvons dire que l'espace (C) est contenu parfaitement dans l'espace (M). Or, notre problème est résolu négativement pour l'espace (C) et donc le raisonnement analogue montre qu'il est résolu négativement pour l'espace (M) ainsi que l'espace (m).

Notre problème est résolu négativement pour les espaces $(C^{(p)})$ *où* $p = 1, 2, \ldots$ *et* (c_0).

En effet, puisque deux espaces $(C^{(p)})$ et (c_0) sont isomorphes[4] respectivement aux espaces (C) et (c), il existe une opération Φ biuni-

1) Cf. loc. cit. 1) de la page 275.
2) Cf. loc. cit. 1) p. 185 théorème 9 de la page 274.
3) Cf. loc. cit. 1) de la page 274.
4) Cf. loc. cit. 1) p. 184 th. 7 et p. 181 de la page 274.

voque et linéaire qui transforme $(C^{(p)})$ en (C) tout entièr. S'il est résolu affirmativement pour l'espace $(C^{(p)})$, il existe pour tout sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{M}$ de $(C^{(p)})$ un sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{N}$ de $(C^{(p)})$ tel que pour tout élément $f \in (C^{(p)})$ se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $f=g+h$ où $g \in \mathfrak{M}$ et $h \in \mathfrak{N}$. Quand nous posons $\Phi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}^*$, $\Phi(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}^*$, $\Phi(f)=f^*$, $\Phi(g)=g^*$ et $\Phi(h)=h^*$, $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{N}^*$ sont en même temps un sous-espace linéaire fermé de (C) et $f^* \in (C)$ se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $f^*=g^*+h^*$ où $g^* \in \mathfrak{M}^*$ et $h^* \in \mathfrak{N}^*$, ce qui contre dit l'hypothèse. Par conséquent notre problème est résolu négativement pour l'espace $(C^{(p)})$ ainsi que l'espace (c).