120. Über die homomorphe Darstellung der Verbände und der multiplikativen Systeme.

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1940.)

Bekanntlich[1] kann jeder distributive Verband als Mengenverband verbandisomorph dargestellt werden. Da umgekehrt jeder Mengenverband distributiv ist, kann ein nicht distributiver Verband niemals als Mengenverband treu dargestellt werden. Nach MacNeille[2] verstehen wir unter einem *multiplikativen System* $\mathfrak{M}$ (kurz M. S.) eine teilweise geordnete Menge, in welcher zu je zwei Elementen a, b aus $\mathfrak{M}$ der Durchschnitt $a \frown b$ eindeutig bestimmt ist, wobei die Existenz der Vereinigung von a und b nicht vorausgesetzt wird. In der vorliegenden Note soll die Darstellung des M. S. $\mathfrak{M}$ als multiplikatives Mengensystem und im allgemeinen die Einbettung in einem distributiven Verband behandelt werden. Zuerst wird einige Eigenschaften der Homomorphismen der Verbände (§ 1) und der M. S. (§ 2) gegeben werden. Das Problem, $\mathfrak{M}$ in einem distributiven Verband mit möglichst einfacher Struktur einzubetten, was schon von MacNeille behandelt wurde,[2] wird zunächst mit Hilfe der Idealtheorie in der Halbgruppen von A. H. Clifford[3] abstrakt gelöst (§ 3), und dann im Zusammenhang mit den Homomorphismen und Darstellungen von $\mathfrak{M}$ untersucht (§ 4, § 5).

1. Es sei $\mathfrak{V}$ ein distributiver Verband mit Einselement e. Unter einem *v-Homomorphismus* f von $\mathfrak{V}$ zu einem Verband $\mathfrak{V}'$ verstehen wir eine eindeutige Zuordnung $a \to f(a)$ von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}'$, so dass dabei $f(a \smile b) = f(a) \smile f(b)$, $f(a \frown b) = f(a) \frown f(b)$ gelten. Zwei v-Homorphismen f_1 und f_2 von $\mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{V}_1$ bzw. $\mathfrak{V}_2$ heissen *äquivalent*, falls $f_1(a) = f_1(b) \leftrightarrow f_2(a) = f_2(b)$ ist, was wir mit $f_1 \sim f_2$ bezeichnen. Die Gesamtheit aller zu einem gegebenen f äquivalenten v-Homomorphismen bezeichnen wir mit $\bar{f}$.

Nun führen wir bzg. der Gesamtheit $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$ aller äquivalenten Homomorphismenklassen $\bar{f}$ die Anordnung folgendermassen ein: $\bar{f}_1 \supset \bar{f}_2$ gilt dann und nur dann, wenn aus $f_1(a) \supset f_1(b)$ $f_2(a) \supset f_2(b)$ folgt. Dann bildet $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$ ersichtlich eine teilweise geordnete Menge, und der identische v-Homomorphismus von $\mathfrak{V}$ auf sich selbst ist das Einselement von $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$.

Eine wichtige Klasse der v-Homomorphismen bilden die *Projektionen* $\{f_a\}$ $(a \in \mathfrak{V})$: Die Projektion f_a wird dabei definiert als die Zuordnung

1) G. Köthe, Die Theorie der Verbände, Enziklopädie d. math. Wiss., **I** (2. Aufl.), (1940), § 10.

2) M. H. MacNeille, Partially ordered sets, Trans. Amer. math. Soc., **42** (1937), 416-460.

3) A. H. Clifford, Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups, Annals of math., **39** (1938), 594-610.

$b \to f_a(b) = a \frown b$ $(b \in \mathfrak{V})$. Aus der Definition folgt, dass $a \neq b \leftrightarrow f_a \nsim f_b$ und $a \supset b \leftrightarrow \bar{f}_a \supset \bar{f}_b$.

Unter einem *irreduziblen v-Homomorphismus* $f_\mathfrak{p}$ verstehen wir einen Homomorphismus auf dem Verband, der bloss aus zwei Elementen e, n $(e \supset n)$ besteht. Also denken wir uns ihn als ein Funktional, dessen Wert 1 oder 0 ist, mit folgender Bedingung: $f_\mathfrak{p}(a \frown b) = \mathrm{Min}\,\big(f_\mathfrak{p}(a), f_\mathfrak{p}(b)\big) = f_\mathfrak{p}(a) \cdot f_\mathfrak{p}(b)$ und $f_\mathfrak{p}(a \smile b) = \mathrm{Max}\,\big(f_\mathfrak{p}(a), f_\mathfrak{p}(b)\big) = f_\mathfrak{p}(a) + f_\mathfrak{p}(b) - f_\mathfrak{p}(a) f_\mathfrak{p}(b)$.[4] Die Gesamtheit aller Elemente a mit $f_\mathfrak{p}(a) = 0$ bildet ein Primideal $\mathfrak{p}$, und umgekehrt entspricht jedem Primideal $\mathfrak{p}$ ein irreduzibler v-Homomorphismus $f_\mathfrak{p}(a)$, der so definiert wird: $f_\mathfrak{p}(a) = 0$ für $a \in \mathfrak{p}$ und $f_\mathfrak{p}(a) = 1$ für $a \bar{\in} \mathfrak{p}$.

Ω sei nun die Menge aller irreduziblen v-Homomorphismen und wir ordnen einem Element $a \in \mathfrak{V}$ die Teilmenge A von Ω, die die Gesamtheit aller irreduziblen v-Homomorphismen $f_\mathfrak{p}$ mit $f_\mathfrak{p}(a) = 1$ ist. Bekanntlich[5] ist diese Zuordnung $a \to F_\Omega(a) = A$ eine v-isomorphe Darstellung von $\mathfrak{V}$ als Mengenverband auf Ω.

Wir können genau so wie bei Projektion f_a einen v-Homomorphismus f_E für jede Teilmenge E von Ω durch die Zuordnung $a \to E \frown A = f_E(a)$ $\big(A = F_\Omega(a)\big)$ definieren. Umgekehrt gilt nun

Satz 1. Jeder v-Homomorphismus f von $\mathfrak{V}$ ist mit einem f_E $(E \subset \Omega)$ äquivalet.[6]

Als eine solche E^r mit $f \sim f_{E^r}$ können wir die Gesamtheit aller $f_\mathfrak{p}$ mit $\bar{f} \supset \bar{f}_\mathfrak{p}$ wählen. Zwar aus $E \supset E'$ auf Ω folgt $\bar{f}_E \supset \bar{f}_{E'}$ in $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$, aber es kann $f_E \sim f_{E'}$ für zwei verschiedene Teilmengen E, E' von Ω sein. Die oben bestimmte Teilmenge E^r hat aber folgende Eigenschaften:

(1) $f \sim f_{E^r}$,

(2) wenn $f \sim f_E$ ist, dann ist $E^r \supset E$;

und umgekehrt ist E^r aus (1), (2) eindeutig bestimmt. Daher gilt $E_1^r \supset E_2^r \leftrightarrow \bar{f}_1 \supset \bar{f}_2$, falls $f_1 \sim f_{E_1^r}$, $f_2 \sim f_{E_2^r}$ sind. Insbesondere ist $A = F_\Omega(a)$ der Repräsentant für die Projektion f_a $(a \in \mathfrak{V})$, denn aus $f_a = f_E$ folgt $E = f_E(\Omega) = f_E(a) = E \frown A$, oder $A \supset E$.

Satz 2. Die teilweise geordnente Menge $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$ bildet einen Verband, und die Projektionen f_a $(a \in \mathfrak{V})$ bilden einen Teilverband von $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$, der mit $\mathfrak{V}$ verband-isomorph ist.

Es seien $f_1 \sim f_{E_1^r}$, $f_2 \sim f_{E_2^r}$, dann werden $\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \smile \bar{f}_2$ bzw. $\bar{f}_4 = \bar{f}_1 \frown \bar{f}_2$ durch $f_3 = f_{E_1^r \smile E_2^r}$ bzw. $f_4 = f_{E_2^r \frown E_2^r}$ bestimmt. Für $f_3 \sim f_{E_3^r}$, $f_4 \sim f_{E_4^r}$ gilt $E_4^r = E_1^r \frown E_2^r$, aber $E_3^r = E_1^r \smile E_2^r$ ist im allgemeinen falsch. $\bar{f}_3$ ist durch folgenden Relationen charakterisiert:

(3) $f_3(a) \supset f_3(b) \leftrightarrow f_1(a) \supset f_1(b)$ und $f_2(a) \supset f_2(b)$.

---

4) S. Kakutani, Weak topology, bicompact set and the principle of duality, Proc. **16** (1940), 63–67.

5) Vgl. z. B. G. Köthe, loc. cit. 1).

6) Vgl. G. Birkhoff, Rings of sets, Duke math. Jour., **3** (1937), 443–454, Theorem 3.

2. Genauso wie beim Verband definieren wir einen *m-Homomorphismus* f von einem M. S. $\mathfrak{M}$ als eine eindeutige Zuordnung $a \to f(a)$ von $\mathfrak{M}$ auf ein M. S. $\mathfrak{M}'$ mit $f(a \frown b) = f(a) \frown f(b)$; und $f_\mathfrak{p}$ heisst *irreduzibel*, wenn $\mathfrak{M}'$ bloss aus zwei Elementen 1 und 0 besteht: nämlich $f_\mathfrak{p}(a) = 1$ oder 0 mit $f_\mathfrak{p}(a \frown b) = f_\mathfrak{p}(a) \cdot f_\mathfrak{p}(b)$.

Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}$ heisst ein *Ideal*, falls aus $a \in \mathfrak{a}$ $a \frown b \in \mathfrak{a}$ für jedes $b \in \mathfrak{B}$ folgt. $\mathfrak{p}$ heisst alsdann *prim*, falls aus $a \frown b \in \mathfrak{p}$ a oder b in $\mathfrak{p}$ enthalten ist. Dann sieht man sofort ein, dass die Gesamtheit aller Elemente mit $f_\mathfrak{p}(a) = 0$ für einen irreduziblen Homomorphismus $f_\mathfrak{p}$ einen Primideal bildet, und umgekehrt.

Satz 3. Die Gesamtheit aller Ideale von $\mathfrak{M}$ bildet einen distributiven Verband. Darunter bildet die Gesamtheit aller Hauptideale (a) $(a \in \mathfrak{B})$ *ein M. S., das mit $\mathfrak{M}$ m-isomorph ist.*

Satz 4. Ω sei die Menge aller irreduziblen m-Homomorphismen $\{f_\mathfrak{p}\}$ von $\mathfrak{M}$, und wir ordnen einem Element $a \in \mathfrak{M}$ die Menge $A \subset \Omega$ von $f_\mathfrak{p}$ mit $f_\mathfrak{p}(a) = 1$. Dann ist diese Zuordnung $a \to F_\Omega(a) = A$ eine m-isomorphe Darstellung von $\mathfrak{M}$ als multiplikatives Mengensystem auf Ω.

Satz 4 wird analogerweise wie beim Verband unter Benutzung vom Satz 3 bewiesen.[7]

Wir definieren $f_a(a \in \mathfrak{M})$, $f_E(E \subset \Omega)$ wie in § 1, dann erhalten wir ganz analog wie bei Satz 1 und 2 folgende Sätze:

Satz 1'. Jeder m-Homomorphismus f von $\mathfrak{M}$ ist mit einem f_E $(E \subset \Omega)$ äquivalent.

Satz 2'. Die Gesamtheit $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ aller äquivalenten m-Homomorphismenklassen von $\mathfrak{M}$ bildet einen Verband, und die Gesamtheit aller Projektionen f_a $(a \in \mathfrak{M})$ bildet ein multiplikatives Teilsystem $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, das mit $\mathfrak{M}$ m-isomorph ist.

3. Nach den Sätzen 3, 4 kann ein M. S. $\mathfrak{M}$ m-isomorph in einem distributiven Verband eingebettet werden. Nun untersuchen wir die *kanonische Erweiterung* von $\mathfrak{M}$ zu einem distributiven Verband $\mathfrak{B}_k$ derart, dass wir, wenn $\mathfrak{M}$ in einem distributiven Verband $\mathfrak{B}$ m-isomorph eingebettet wird, den von $\mathfrak{M}$ erzeugten Teilverband von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}_k$ v-homomorph abbilden können.[8]

Lemma 1. Aus einem M. S. $\mathfrak{M}$ können wir eine idempotente Halbgruppe $\mathfrak{G}$ (nämlich eine Halbgruppe, deren Elemente sämtlich idempotent sind) konstruieren, indem $a \cdot b$ durch $a \frown b$ definiert, und umgekehrt.

Dann ist $a \supset b$ mit $a \mid b$ (nämlich $b = ac$) äquivalent. Nach A. H. Clifford wird das v-Ideal $\mathfrak{a} = (A)$, das durch eine Teilmenge A von $\mathfrak{G}$ erzeugt wird, folgendermassen definieren: $\mathfrak{a} \ni b$, dann und nur dann, wenn $s \mid bt$ für jedes solche Paar s, t gilt, welches $s \mid at$ für jedes Element $a \in A$ genügt. Wir bezeichnen mit AB die Gesamtheit aller Elemente ab mit $a \in A$, $b \in B$. Dann gilt:

(4) $\mathfrak{ab}$ selbst ist ein v-Ideal, falls $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ v-Ideal von $\mathfrak{G}$ sind. Es gilt $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$, und insbesondere $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$.

---

7) Vgl. G. Köthe, loc. cit. 1), S. 14.

8) Unsere Definition der kanonische Erweiterung ist etwas verschieden von der nach MacNeille, loc. cit. 2).

(5) (a) ist die Gesamtheit aller Elemente a' mit $a \mid a'$. Es gilt $(a)(b)=(ab)$.

(6) Es gilt $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b},\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ und $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}$.[9]

Also bildet die Gesamtheit aller v-Ideale von $\mathfrak{G}$ bzw. die Gesamtheit aller v-Ideale mit endlich vielen Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ eine idempotente Halbgruppe $\mathfrak{G}_v$ bzw. $\mathfrak{G}_e$, und nach Lemma 1 konstruieren wir die entsprechenden M. S. $\mathfrak{V}_v$ bzw. $\mathfrak{V}_e$. Dann sieht man leicht ein, dass die Vereinigung $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{V}_v$ bzw. $\mathfrak{V}_e$ gleich $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ ist, und nach (6) $\mathfrak{V}_v$ und $\mathfrak{V}_e$ distributive Verbände sind. Ähnlicherweise ist $\mathfrak{V}_v$ vollständig distributiv, nämlich es gilt für jedes System von Elementen $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$ von $\mathfrak{V}_v$ $(\underset{\alpha}{\mathbf{V}}\mathfrak{a}_\alpha)\frown\mathfrak{b}=\underset{\alpha}{\mathbf{V}}(\mathfrak{a}_\alpha\frown\mathfrak{b})$, wobei $\underset{\alpha}{\mathbf{V}}$ die Vereinigung bedeutet. Aus (5) folgt also

Satz 5. Bei der Zuordnung $a\to(a)$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{V}_v$ bzw. $\mathfrak{V}_e$ ist $\mathfrak{M}$ m-isomorph im distributiven Verband $\mathfrak{V}_v$ bzw. $\mathfrak{V}_e$ eingebettet.

In einem M. S. heisst $a\smile b$ distributiv, wenn für jedes c $(a\smile b)\frown c=(a\frown c)\smile(b\frown c)$ gilt.

Lemma 2. Zwei Elemente a, b aus $\mathfrak{M}$ haben dann und nur dann die distributive Vereinigung, wenn das v-Ideal (a, b) ein v-Hauptideal ist.[10]

Denn es sei nämlich $(a,b)=(c)$. Ist $d\mid a$ und $d\mid b$, dann ist $(c)=(a,b)\subset(d)$. Also gilt $d\mid c$, und daher muss $c=a\smile b$. Für jedes $d\in\mathfrak{M}$ gilt nach (6) $\big(d\cdot(a\smile b)\big)=(d)\,(a\smile b)=(d)\,(a,b)=(da,db)$, also gilt $d\frown(a\smile b)=(d\frown a)\smile(d\frown b)$. Die Notwendigkeit der Bedingung lässt sich ähnlicherweise beweisen. Also gilt auch

Lemma 3. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein M. S. ein distributiver Verband sei, ist, dass jedes v-Ideal mit endlichvielen Erzeugenden ein v-Hauptideal ist.

Es sei nun $\mathfrak{V}$ ein distributiver Verband, der ein mit $\mathfrak{M}$ m-isomorphes M. S. $\mathfrak{M}'$ enthält und durch $\mathfrak{M}'$ erzeugt wird. Also wird jedes Element von $\mathfrak{V}$ als $a_1'\smile\cdots\smile a_r'\,(a_i'\in\mathfrak{M}')$ dargestellt. Nun ordnen wir jedem Element $a_1'\smile\cdots\smile a_r'$ von $\mathfrak{V}$ das v-Ideal $(a_1,\ldots,a_r)$ von $\mathfrak{M}$ zu, wobei $a\leftrightarrow a'$ einen m-Isomorphismus zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ bedeutet. Da $\mathfrak{V}$ distributiv ist, folgt aus Lemma 3, dass sich $(a_1',\ldots,a_r')\supset(b_2',\ldots,b_s')$ in $\mathfrak{V}$ aus $a_1'\smile\cdots\smile a_r'\supset b_1'\smile\cdots b_s'$ ergibt. Also ist $s'\mid b_i't'$ $(i=1,2,\ldots,s)$ für jedes Paar s',t' mit $s'\mid a_j't'$ $(j=1,2,\ldots,r)$, wobei s',t' Elemente aus $\mathfrak{M}'$ sind. Nach dem m-Isomorphismus $a\leftrightarrow a'$ zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ erhalten wir dieselbe Relation auf $\mathfrak{M}$, was zeigt $(a_1,\ldots,a_r)\supset(b_1,\ldots,b_s)$ in $\mathfrak{M}$. Insbesondere ergibt sich $(a_1,\ldots,a_r)=(b_1,\ldots,b_s)$ aus $a_1'\smile\cdots\smile a_r'=b_1'\smile\cdots\smile b_s'$. Daher ist die Zuordnung $a_1'\smile\cdots\smile a_r'\to(a_1,\ldots,a_r)$ von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}_e$ eindeutig und v-homomorph. Also haben wir

Satz 6. Der distributive Verband $\mathfrak{V}_e$ ist die kanonische Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

---

9) Vgl. A. H. Clifford, loc. cit. 4).

10) Daraus folgt, dass unsere Definition von (A) mit der Definition der Ideale von MacNeille (loc. cit. 2), S. 449) äquivalent ist. Denn es sei $b\in(A)$ in unserem Sinne. Dann ist $(b)=(b)\,(A)=(bA)$, also gilt $b=\mathbf{V}_\alpha ba_\alpha(a_\alpha\in A)$ mit distributiver Vereinigung $\mathbf{V}_\alpha$, die Umkehrung folgt leicht aus der Definition des v-Ideals.

Ist insbesondere $\mathfrak{M}$ in einem vollständig distributiven Verband $\mathfrak{V}$ eingebettet, dann können wir einen Teilverband $\mathfrak{V}_0$ (bzw. $\mathfrak{V}_1$) von $\mathfrak{V}$ so wählen, dass $\mathfrak{V}_0$ (bzw. $\mathfrak{V}_1$) mit $\mathfrak{V}_v$ (bzw. $\mathfrak{V}_e$) v-isomorph ist. Dazu genügt nur die Gesamtheit aller derjenigen Elemente a zu wählen, die in der Form $(a)=(\mathfrak{a})$ in $\mathfrak{V}$ mit einem v-Ideal $\mathfrak{a}$ (bzw. v-Ideal $\mathfrak{a}$ mit endlich vielen Erzeugenden) von $\mathfrak{M}$ dargestellt werden.

4. Nun fassen wir die kanonische Erweiterung $\mathfrak{V}_e$ von $\mathfrak{M}$ als m-Homomorphismenverband auf. Es sei $\mathfrak{V}$ der Teilverband von $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ (im Satz 2′), der von den Projektionen $\{f_a\}$ ($a \in \mathfrak{M}$) erzeugt wird. Es sei $A=F_{\Omega}(a)$ in Ω, dann gilt $\bar{f}_{A_1\cup\cdots\cup A_r}=\bar{f}_{a_1}\cup\cdots\cup\bar{f}_{a_r}$. Für s, t aus $\mathfrak{M}$ gilt

$$f_{A_1\cup\cdots\cup A_r}(s)\supset f_{A_1\cup\cdots\cup A_r}(t)\leftrightarrow f_{a_i}(s)\supset f_{a_i}(t)\qquad (i=1, 2, \dots, r),$$

wie schon gezeigt wurde. Wenn wir die zugehörige idempotente Halbgruppe von $\mathfrak{M}$ konstruieren, dann ist

$$f_{a_i}(s)\supset f_{a_i}(t)\leftrightarrow a_i\cap s\supset a_i\cap t\leftrightarrow a_is\mid a_it\leftrightarrow s\mid a_it.$$

Also ist die Relation $f_{A_1\cup\cdots\cup A_r}\supset f_{B_1\cup\cdots\cup B_s}$ mit der folgenden Aussage äquivalent: für jedes s, t aus $\mathfrak{M}$ mit $s\mid a_it$ $(i=1, 2, \dots, r)$ gilt auch $s\mid b_it$ $(i=1, 2, \dots, s)$, nämlich $(a_1, \dots, a_r)\supset(b_1, \dots, b_s)$ auf $\mathfrak{M}$. Daher ist die Zuordnung $f_{A_1\cup\cdots\cup A_r}\leftrightarrow(a_1, \dots, a_r)$ von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}_e(\mathfrak{M})$ v-isomorph. Damit haben wir

Satz 7. Die kanonische Erweiterung $\mathfrak{V}_e$ von $\mathfrak{M}$ ist mit dem von den Projektionen $\{f_a\}$ erzeugten Teilverband $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ v-isomorph.

5. Zum Schluss denken wir uns die Relation zwischen der Darstellung $a\to A=F_{\Omega}(a)$ im Satz 4 und der kanonische Erweiterung $\mathfrak{V}_e$ von einem M. S. $\mathfrak{M}$.

Ein irreduzibler m-Homomorphismus $f_{\mathfrak{p}}$ vom $\mathfrak{M}$ heisst normal, wenn aus $f_{\mathfrak{p}}(a_i)=0$ $(i=1, 2, \dots, r)$ $f_{\mathfrak{p}}(b)=0$ für jedes Element $b\in(a_1, \dots, a_r)$ folgt. Wir bezeichnen mit N die Teilmenge aller normalen irreduziblen m-Homomorphismen von $\mathfrak{M}$.

Es sei $f_{\mathfrak{p}}^0$ ein irreduzibler v-Homomorphismus von der normalen Erweiterung $\mathfrak{V}_e$. Wenn wir $f_{\mathfrak{p}}$ durch $f_{\mathfrak{p}}(a)=f_{\mathfrak{p}}^0\big((a)\big)$ ($a\in\mathfrak{M}$) definieren, dann ist $f_{\mathfrak{p}}$ ersichtlich ein normaler irreduzibler m-Homomorphismus. Umgekehrt können wir bzg. eines normalen irreduziblen m-Homomorphismus $f_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{M}$ den irreduziblen v-Homomorphismus $f_{\mathfrak{p}}^0$ von $\mathfrak{V}_e$ durch $f_{\mathfrak{p}}^0\big((a_1, \dots, a_r)\big)=\mathrm{Max}\,\big(f_{\mathfrak{p}}(a), \dots, f_{\mathfrak{p}}(a_r)\big)$ definieren. Diese Zuordnung $N\ni f_{\mathfrak{p}}\leftrightarrow f_{\mathfrak{p}}^0\in\Omega(\mathfrak{V}_e)$ ist eineindeutig, wie leicht zu sehen ist. Da $\mathfrak{V}_e$ auf $\Omega(\mathfrak{V}_e)$ als Mengenverband treu dargestellt wird, haben wir

Satz 8. Die Zuordnung $a\to F_N(a)=N\cap F_{\Omega}(a)$ ist die m-isomorphe Darstellung von $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{V}_e$ ist auch auf N durch die Zuordung $(a_1)\cup\cdots\cup(a_n)=(a_1, \dots, a_n)\to F_N(a_1)\cup\cdots\cup F_N(a_n)$ v-isomorph dargestellt.

Ganz analogerweise können wir die folgende Tatsache beweisen: Es sei $\mathfrak{V}'$ ein distributiver Verband, der $\mathfrak{M}$ enthält und durch $\mathfrak{M}$ erzeugt wird. $\Omega'(\mathfrak{B}')$ sei die Gesamtheit aller irreduziblen v-Homomorphismen $f'_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{B}'$, und $N' \subset \Omega'$ die Menge derjenigen $f'_{\mathfrak{p}}$, die in $\mathfrak{M}$ einen normalen irreduziblen m-Homomorphismus induzieren. Umgekehrt kann jedes normale $f_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{M}$ zu einem $f'_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{B}'$ ertweitert werden. Die treue v-Darstellung von $\mathfrak{B}'$ auf $\Omega'(\mathfrak{B}')$ sei $a' \to F_{\Omega'}(a') \subset \Omega'$ $(a' \in \mathfrak{B}')$. Dann ist die Zuordnung $\mathfrak{B}' \ni a' \to N' \frown F_{\Omega'}(a')$ eine v-homomorphe Zuordnung von $\mathfrak{B}'$ auf $\mathfrak{B}_e$, die abstrakt schon im Satz 6 bestimmt wurde.