# 23. *Zum Durchschnittssatze in einartigen Ringen.*

Von Eiiti KAMEI.
Mathematisches Institut, Hirosima Universität.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1941.)

Bekanntlich gilt der Durchschnittssatz[1] im kommutativen Ringe mit O-Satz. Aber leider wird die Gültigkeit dieses Satzes nur auf Grund der Voraussetzung des O-Satzes behauptet und ist der O-Satz nicht die notwendige Bedingung dafür, dass der Durchschnittssatz gilt. In der vorliegenden Arbeit wollen wir dieses Problem, die notwendige und hinreichende Bedingung zu suchen, im kommutativen einartigen Ringe[2] $\mathfrak{R}$ behandeln.

**1.** *Notwendige Bedingung.* Wir sagen, dass in einem Ringe $\mathfrak{R}$ der *Idealquotienten-teilerkettensatz* (oder kurz „*Q. O.-Satz*“) gilt, wenn jede Teilerkette der Idealquotienten $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subset \cdots\cdots$ im Endlichen abbricht. Dann ergibt sich

*Satz 1. Wenn der Durchschnittssatz in einem allgemeinen Ringe $\mathfrak{R}$ gilt, so ist in $\mathfrak{R}$ der Q. O.-Satz erfüllt.*

Beweis. Wir können mühelos die Rechenregel $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1) : \mathfrak{a}_2$ beweisen, und für unseren Zweck genügt es die Relation $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1$ zu untersuchen. Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$ nach unserer Voraussetzung eine unverkürzbare Darstellung als Durchschnitt von endlich vielen grössten Primärkomponenten, wo jedes Primärkomponent $\mathfrak{q}_i$ zu verschiedenem Primideal $\mathfrak{p}_i$ (einschl. $\mathfrak{R}$) gehört. Dann ist bekanntlich

$$(1) \qquad \mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{q}_1 : \mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{q}_2 : \mathfrak{a}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n : \mathfrak{a}_1 .$$

Dabei ergibt sich für jedes $i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *dass entweder* $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{R}$ *oder* $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$ *ein zu* $\mathfrak{p}_i$ *gehöriges* (*starkes*) *Primärideal ist.*

Denn, ist ersten $\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{q}_i$, so muss $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{R}$ sein. Ist zweitens $\mathfrak{a}_1 \not\leqq \mathfrak{p}_i$, so gilt $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{q}_i$. Ist drittens $\mathfrak{a}_1 \not\leqq \mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{p}_i$, so muss $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i^{\varrho} \leqq \mathfrak{q}_i \leqq \mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$ gelten, da $\mathfrak{q}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal ist. Ferner, aus $ab \subset \mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$, $b \not\subset \mathfrak{p}_i$ folgt $a \subset \mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$; also ist $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges starkes Primärideal.

Wir kommen damit aus der Darstellung (1) durch die Weglassung aller überflüssigen Primärideale $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$, d. h. aller derjenigen, die den Durchschnitt der übrigen umfassen, zu einer unverkürzbaren Darstellung $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{q}'_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}'_m$, $m \leqq n$, wobei $\mathfrak{q}'_j$ die Form $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{a}_1$ hat. Ist $\mathfrak{p}'_j$ das zum Primärideal $\mathfrak{q}'_j$ gehörige Primideal, so muss $\mathfrak{p}'_j$ eines aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sein.

Wenn $m < n$ ist, so wird bei zwei unverkürzbaren Darstellungen

---

1) *Durchschnittssatz: In einem O-Ringe lässt sich jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen* (*stark*) *darstellen,* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$.

2) Ein Ring heisst „*einartig*“, wenn in $\mathfrak{R}$ kein von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenes Primideal durch jedes von selbst und von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal teilbar ist. Hier sei es bemerkt, dass im einartigen Ringe nicht immer der O-Satz gilt. Vgl. S. Mori, Allgemeine Z. P. I.-Ringe, Jour. Sci. Hirosima Univ. **10** (1940), 133.

von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1$ die Anzahl der Komponenten von $\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1$ weniger als dieselbe von $\mathfrak{a}$.

Wenn $m=n$ ist, so müssen die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale identisch mit den zu $\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1$ gehörigen Primidealen sein. Hier haben wir zu zeigen, *dass für mindestens eines aus* $i$ $(i=1, 2. \dots, n)$ *der Exponent* $\rho'_i$ *von* $\mathfrak{q}_i:\mathfrak{a}_1$ *weniger als der Exponent* $\rho_i$ *von* $\mathfrak{q}_i$ *ist.* In der Tat ist klar $\rho'_i \leqq \rho_i$ für jedes $i$; denn beide Primärideale $\mathfrak{q}_i:\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{q}_i$ gehören zum selben Primideal $\mathfrak{p}_i$. Da $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1$ ist, muss $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_i:\mathfrak{a}_1$ für mindestens eines $i$ sein. Also für solches $i$ gibt es ein durch $\mathfrak{q}_i:\mathfrak{a}_1$ aber nicht durch $\mathfrak{q}_i$ teilbares Element $r$. Danach gilt $\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{p}_i$ und daraus folgt $\mathfrak{p}_i^{\rho_i-1}\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{p}_i^{\rho_i} \leqq \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{p}_i^{\rho_i-1} \leqq \mathfrak{q}_i:\mathfrak{a}_1$. Das zeigt $\rho'_i \leqq \rho_i-1$.

Wenn wir die Ergebnisse zusammenfassen, so erhalten wir, dass bei jeder Teilerkette von Idealquotientienten entweder die Anzahl der Komponenten sich vermindert oder mindestens ein Exponent der Komponenten immer weniger als der Vorgänger werden muss. Darum muss die Kette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subset \cdots\cdots$ nach endlich vielen Schritten schliesslich zum Ende gelangen, und unser Satz ist bewiesen.

**2.** *Hinreichende Bedingung.* Ein Ring heisst „*einartig*", wenn in $\mathfrak{R}$ kein Primideal (ausser $\mathfrak{R}$ und (0)) durch ein von $\mathfrak{R}$ und von selbst verschiedenes Primideal teilbar ist. In diesem Paragraphen sei im einartigen Ringe $\mathfrak{R}$ sets der Q. O.-Satz vorausgesetzt.

Um zu unserem Ziel zu gelangen, werden wir einige Hilfssätze vorausschicken.

*Hilfssatz 1. Für ein beliebiges Ideal* $\mathfrak{a}$ *gibt es mindestens ein Primideal* $\mathfrak{p}$ (*einschl.* $\mathfrak{R}$) *von der Art, dass für ein durch* $\mathfrak{a}$ *unteilbares Element* $r$ $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r)$ *ist.*

Denn, ist $\mathfrak{a}$ nicht prim, gibt es zwei durch $\mathfrak{a}$ unteilbare Elemente $r_1, r'_1$ derart, dass $r_1r'_1 \subset \mathfrak{a}$ ist, und damit erhalten wir einen echten Teiler $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(r_1)$ von $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}_1$ nicht prim, so fahren wir gleichartig fort. Dann folgt wegen des Q. O.-Satzes die Existenz des Primideals $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r)$, $r \not\subset \mathfrak{a}$.

Ein solches Primideal $\mathfrak{p}$, dass für ein Element $r$ $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r)$, $r \not\subset \mathfrak{a}$ ist, heisst *ein zu* $\mathfrak{a}$ *gehöriges Primideal*[1]. Hier sei es bemerkt, dass $\mathfrak{R}$ selbst das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal, d. h. $\mathfrak{R}=\mathfrak{a}:(r)$, $r \not\subset \mathfrak{a}$ sein kann.

*Hilfssatz 2. Es gibt nur endlich viele verschiedene zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Primideale.*

Es seien nämlich $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots$ alle von $\mathfrak{R}$ verschiedene, zu $\mathfrak{a}$ gehörige verschiedene Primideale. Da im einartigen Ringe jede zwei Primideale $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ $(i \neq j)$ durch einander unteilbar sind und da $\mathfrak{p}_i$ die Form $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(r_i)$, $r_i \not\subset \mathfrak{a}$ hat, so gibt es ein Element $s$ von der Art, dass $s \subset \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{i-1}$, $s \not\subset \mathfrak{p}_i$ ist, also gilt $sr_i \not\subset \mathfrak{a}$, und folglich $r_i \not\subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{i-1}$. Anderseits ist $(r_i)\mathfrak{p}_i \leqq \mathfrak{a}$, nämlich $r_i \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_i$. Danach ist $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_i$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{i-1}$, und nach dem Q. O.-Satz muss die Teilerkette der Idealquotienten $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset \cdots\cdots$ im Endlichen abbrechen, und daraus folgt die Endlichkeit der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale.

---

1) Diese Definition wird bei S. Mori benützt. S. Mori, Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Jour. Sci. Hirosima Univ. **1** (1931), 170.

*Hilfssatz 3. Es sein $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale (einschl. $\mathfrak{R}$). Dann gilt wegen des Q. O.-Satzes* $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i-1} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i} = \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i+1} = \cdots\cdots$ *für ein $n_i$. Für diese $n_i$ $(i=1, 2, \dots, m)$ gilt es ferner*

$$\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2^{n_2} \dots \mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{a} .$$

Beweis. Gehen wir aus von $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1}$ und bilden wir die Teilerkette $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2^{n_2}$, und dann die Kette $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2^{n_2}\mathfrak{p}_3 \subset \cdots\cdots$, u. s. w., so gelangen wir schliesslich zum Ideale $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2^{n_2}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m}$. Ist $\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots \mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{a}$, so ist unsere Behauptung einleuchtend. Im folgenden soll damit bewiesen werden, dass aus $\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m} \not\leqq \mathfrak{a}$ ein Widerspruch folgt. Ist $\mathfrak{b}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}_i$ (einschl. $\mathfrak{b}=\mathfrak{R}$), so ist $\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_i^{n_i+1}\dots \mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{a}$ und aus $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i+1}$ folgt damit ein Widerspruch $\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_i^{n_i}\dots \mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{a}$. Wenn $\mathfrak{b}$ dagegen nicht prim ist, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}'=\mathfrak{b}:(a)$, $a \not\leqq \mathfrak{b}$ (einschl. $\mathfrak{p}'=\mathfrak{R}$), und damit erhalten wir einen echten Teiler $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}:\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{b}'\mathfrak{p}' \leqq \mathfrak{b}$, also muss $\mathfrak{b}'\mathfrak{p}'\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{b}\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots \mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{a}$ und daher $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a}:\mathfrak{p}'\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m}$ sein. Ist $\mathfrak{p}'$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}_i$ (einschl. $\mathfrak{R}$), so gilt $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_i^{n_i+1}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m}=\mathfrak{b}$. Ist dagegen $\mathfrak{p}'=\mathfrak{R}$ kein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal (auf Grund der Einartigkeit von $\mathfrak{R}$), so gilt auch $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a}:\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m} \leqq \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1^{n_1+1}\mathfrak{p}_2^{n_2}\dots\mathfrak{p}_m^{n_m}=\mathfrak{b}$, da $\mathfrak{R} \geqq \mathfrak{p}_1$ ist. Das widerspricht gegen $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$. q. e. d.

Es sei $\mathfrak{p}_i$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal und sei $\mathfrak{a}_i'=(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{n_i})$, wobei $n_i$ eine solche Zahl bedeutet, dass $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i-1} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i}=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i^{n_i+1}=\cdots\cdots$ ist. Es sei $\mathfrak{q}_i$ das Ideal aller Elemente aus $\mathfrak{p}_i$, die durch Multiplikation mit einem geeigneten durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbaren Elemente in Element von $\mathfrak{a}_i'$ verwandelt werden können. Dann ist $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}_i' \leqq \mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ *ist ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges (starkes) Primärideal.* Denn aus $ab \subset \mathfrak{q}_i$, $b \not\leqq \mathfrak{p}_i$ folgt $abr \subset \mathfrak{a}_i'$, $r \not\leqq \mathfrak{p}_i$ und daraus folgt $a \subset \mathfrak{q}_i$, da $br \not\leqq \mathfrak{p}_i$ ist. Ausserdem gelten $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i^{n_i} \subset \mathfrak{q}_i$. Solche Primärideale $\mathfrak{q}_i$ heissen *die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörigen Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$[1].

Mit Hilfe der soeben gewonnenen Hilfssätze sind wir nun imstande, die hinreichende Bedingung zu beweisen;

*Satz 2. Wenn im einartigen Ringe $\mathfrak{R}$ der Q. O.-Satz gilt, so gilt auch der Durchschnittssatz.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{R}$ ein und nur ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal, so ist $\mathfrak{a}$ nach Hilfssatz 3 ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal und unser Satz ist schon bewiesen. Nun seien $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_{m'}$ alle von $\mathfrak{R}$ verschiedenen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale und $\mathfrak{q}_i$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörigen Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$. Dann müssen wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden.

I. Es sei $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{m'}$. Dann ist der Satz fertig.

II. Es sei $\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{m'} \supset \mathfrak{a}$. Erstens können wir beweisen, dass $\mathfrak{R}=\mathfrak{a}:(r)$, $r \not\leqq \mathfrak{a}$ für ein Element $r$ gilt. Denn es gibt das durch

1) Zur Definition der Primärkomponent von $\mathfrak{a}$ vgl. W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingungen. Math. Ann. **101** (1929), 729.

$\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{m'}$ aber nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbare Element $r_1$, und für ein Element $r_i' \not\subset \mathfrak{p}_i$ gilt $r_1 r_i' \subset (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{n_i})$ $(i=1, 2, \ldots, m')$, und nach Hilfssatz 3 ist $r_1 r_1' \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_{i-1}^{n_{i-1}} \mathfrak{p}_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots \mathfrak{p}_{m'}^{n_{m'}} \mathfrak{R}^n \leqq \mathfrak{a}$. Danach kommt das Produkt des Elementes $r_1$ mit dem durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbaren Elemente $r_i''$ in $\mathfrak{a}$. Setzen wir nun $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} : (r_1)$, so muss $r_i'' \subset \mathfrak{b}$, $r_i'' \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m')$ sein. Da für ein zu $\mathfrak{b}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ und ein Element $r_0$ $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} : (r_0)$, $r_0 \not\subset \mathfrak{b}$ gilt, ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (r_1 r_0)$, $r_1 r_0 \not\subset \mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal. Aber aus $r_i'' \subset \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}$, $r_i'' \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m')$ folgt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m')$. Da $\mathfrak{R}$ ein einartiger Ring ist, so muss damit $\mathfrak{R} = \mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (r_1 r_0)$, $r_1 r_0 \not\subset \mathfrak{a}$ und folglich $\mathfrak{R}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal sein. So haben wir einen echten Teiler $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} : \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{a}$.

Zweitens: Wenn wir beweisen können, dass für eine hinreichend grosse ganze Zahl $n$ der Durchschnitt $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a}) \frown \mathfrak{a}_0$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, so gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{m'} \frown (\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a})$[1], und daher folgt unser Satz.

Zu diesem Zwecke sei

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{m'} \frown (\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a})$$

für eine hinreichend grosse ganze Zahl $n$, dann gibt es ein durch $\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{m'} \frown (\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a})$ aber nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbares Element $r_1$, und nach dem im ersten Falle gewonnen Resultat gilt $\mathfrak{R} = \mathfrak{a} : (r_1 r_0)$, $r_1 r_0 \not\subset \mathfrak{a}$ und daraus folgt $r_1 r_0 \subset \mathfrak{a}_0$, da $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} : \mathfrak{R}$ ist. Also erhalten wir

$$(1) \qquad r_1 r_0 \not\subset \mathfrak{a}, \qquad r_1 r_0 \subset (\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a}) \frown \mathfrak{a}_0 .$$

Setzen wir nun $\mathfrak{p}_1 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{m'} = \mathfrak{H}$, dann ist nach Hilfssatz 3

$$(2) \qquad \mathfrak{H}^k \leqq \mathfrak{a}$$

für eine grosse Zahl $k (> n_1 + n_2 + \cdots + n_{m'})$. Ausserdem können wir ein Element $p$ auswählen, das durch keines aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{m'}$ teilbar ist. Bilden wir das Ideal $\mathfrak{a}_1 = \big((p), \mathfrak{H}\big)$, so wird $\mathfrak{R}$ ein und nur ein zu $\mathfrak{a}_1$ gehöriges Primideal. Denn im einartigen Ringe sind jede zwei von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ $(i \neq j)$ durch einander unteilbar. Aus Hilfssatz 3 folgt danach

$$(3) \qquad \mathfrak{R}^l \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1), \qquad \mathfrak{R}^{2kl} \equiv 0\,(p^{2k}, p^{2k-1}\mathfrak{H}, \ldots, p^k \mathfrak{H}^k, \ldots, \mathfrak{H}^{2k})$$

und aus (2) und (3) ergibt sich

$$(4) \qquad \mathfrak{R}^n \equiv 0\big((p^{k+1}), \mathfrak{a}\big) \quad \text{für} \quad n = 2kl .$$

Ist $a_0$ ein beliebiges Element aus $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a}) \frown \mathfrak{a}_0$, so folgt aus (4)

$$(5) \qquad a_0 \equiv r p^k \qquad (\mathfrak{a}) .$$

Aus $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} : \mathfrak{R}$ folgt damit $a_0 p \equiv r p^{k+1} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Anderseits ist nach dem Q. O.-Satze

$$\mathfrak{a} : (p^k) = \mathfrak{a} : (p^{k+1}) = \cdots\cdots \quad \neq \mathfrak{R}$$

1) Das Ideal $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{a})$ wird als ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal angesehen.

für ein $k$, da jede Potenz von $p$ durch $\mathfrak{a}$ unteilbar ist. Daraus erhalten wir $r \equiv 0\big(\mathfrak{a}:(p^{k+1})\big)$ und folglich ist $r \equiv 0\big(\mathfrak{a}:(p^k)\big)$. Also muss $a_0$ nach (5) ein Element aus $\mathfrak{a}$ sein, und daraus erhalten wir einen Widerspruch $r_1 r_0 \subset \mathfrak{a}$ gegen (1). Also ist unser Satz völlig bewiesen.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

*Im einartigen kommutativen Ringe $\mathfrak{R}$ ist der Q. O.-Satz notwendig und hinreichend dafür, dass in $\mathfrak{R}$ der Durchschnittssatz gilt.*