PAPERS COMMUNICATED

39. Gemeinsame Behandlung der Differential- und Integralinvarianten der Kurven und der „Horn Angles" in den elliptischen konformen, parabolischen konformen und hyperbolischen konformen Ebenen[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1941.)

1. *Einleitung.* Herr J. M. Feld hat Differential- und Integralinvarianten ebener Kurven und „Horn Angles" unter den konformen Transformationen mit Benutzung von seinen verallgemeinerten Schwarzschen Ableitungen behandelt[2]. Im folgenden möchte ich die entsprechenden Invarianten in den elliptischen (d. h. gewöhnlichen) konformen, parabolischen konformen und hyperbolischen konformen Ebenen[3] gemeinsam behandeln.

2. *Die zu Grunde liegenden komplexen Zahlen.* Die

elliptischen | parabolischen | hyperbolischen

konformen Transformationen seien:

$$Z=f(z)\,, \qquad \bar{Z}=\bar{f}(\bar{z})\,,$$

$$Z=X+mY\,, \qquad \bar{Z}=X-mY\,,$$

$$z=x+my=\sqrt{x^2-m^2y^2}\,e^{m\theta}\,, \quad \bar{z}=x-my=\sqrt{x^2-m^2y^2}\,e^{-m\theta}\,,$$

$m=i$, $i^2=-1$, | $m=p=$ Infinitesimale, $p^2=0$, | $m=h$, $h^2=+1$,

wobei X, Y, x und y reelle Zahlen sind, so dass die Bedingungen

$$X_x=Y_y\,, \qquad m^2X_y=Y_x$$

bestehen.

Es sei $\phi(z,\bar{z})=0$ die Gleichungen einer Kurve in der z-Ebene und $\Phi(Z,\bar{Z})=0$ die ihres Bildes.

3. *Drei Arten von konformen Invarianten der „m-Horn Angles" erster Ordnung.* Die beiden analytischen Bögen c_1 und c_2, deren Gleichungen bzw.

$$\phi_1(z,\bar{z})=0\,, \qquad \phi_2(z,\bar{z})=0$$

sind, bilden ein „m-Horn Angle" im Punkte p in der z-Ebene und C_1, C_2, deren Gleichungen bzw.

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) J. M. Feld, Differential and Integral Invariants of Plane Curves and Horn Angles. Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941), 318–327.

3) Vgl. T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien. Proc. **16** (1940), 333–340. *Siehe auch die Schlussbemerkung!*

$$\Phi_1(z, \bar{z})=0\,, \qquad \Phi_2(z, \bar{z})=0$$

im Punkte P in der Z-Ebene.

Da, nun,

$$\frac{dZ}{d\bar{Z}}=\left(\frac{dZ}{dz}:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)\frac{dz}{d\bar{z}} \tag{1}$$

ist, erhält man

$$\frac{d^2Z}{d\bar{Z}^2}=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)\left[\left(\frac{dZ}{dz}:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)\frac{d^2z}{d\bar{z}^2}+\left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)^2\frac{d}{dz}\left(\frac{dZ}{dz}:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)\right]. \tag{2}$$

Nach (2) ist

$$\frac{d^2Z_2}{d\bar{z}_2^2}-\frac{d^2Z_1}{d\bar{z}_1^2}=\left[\frac{dZ}{dz}:\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2\right]\left[\frac{d^2z_2}{d\bar{z}_2^2}-\frac{d^2z_1}{d\bar{z}_1^2}\right], \tag*{[3]}$$

da

$$\frac{dz_1}{d\bar{z}_1}=\frac{dz_2}{d\bar{z}_2} \tag{4}$$

im Punkte P ist.

Beachtet man dass die Beziehung

$$\frac{dZ_1}{d\bar{Z}_1}=\frac{dZ_2}{d\bar{Z}_2} \tag{5}$$

im Punkte P gilt, so erhält man aus (1) und (3)

$$\frac{d^2Z_2}{d\bar{Z}_2^2}:\frac{dZ_2}{d\bar{Z}_2}-\frac{d^2Z_1}{d\bar{Z}_1^2}:\frac{dZ_1}{d\bar{Z}_1}=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)\left[\frac{d^2z_2}{d\bar{z}_2^2}:\frac{dz_2}{d\bar{z}_2}-\frac{d^2z_1}{d\bar{z}_1^2}:\frac{dz_1}{d\bar{z}_1}\right]. \tag*{[6]}$$

Also gilt der

Satz 1°. Die beiden Grössen

$$\frac{d^2z_2}{d\bar{z}_2^2}-\frac{d^2z_1}{d\bar{z}_1^2}\,, \tag{7}$$

$$\frac{d^2z_2}{d\bar{z}_2^2}:\frac{dz_2}{d\bar{z}_2}-\frac{d^2z_1}{d\bar{z}_1^2}:\frac{dz_1}{d\bar{z}_1} \tag{8}$$

sind m-komplexe Relativinvarianten zweiter Ordnung der „m-Horn Angles“ erster Ordnung.

Für die Schwarzsche Ableitung $\{y, x\}$ mit $x=x(s)$, $y=y(t)$ haben wir die Cayleysche Identität[1]:

$$\{y, x\}=\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\{y, t\}-\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\{x, s\}+\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\{t, s\}\,. \tag{9}$$

Setzt man $y=Z$, $x=\bar{Z}$, $t=z$, $s=\bar{z}$ in (9), so folgt:

$$\{Z, \bar{Z}\}=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2\left[\{Z, z\}\left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)^2-\{\bar{Z}, \bar{z}\}+\{z, \bar{z}\}\right]. \tag{10}$$

1) A. Cayley, On the Schwarzean Derivative and Polyhedral Functions. Collected Works, vol. 1, S. 148.

Folglich ist

$$\{Z_2, \bar{Z}_2\} - \{Z_1, \bar{Z}_1\} = \left(1 : \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2 \left[\{Z_2, z_2\}\left(\frac{dz_2}{d\bar{z}_2}\right)^2 - \{\bar{Z}_2, \bar{z}_2\} + \{z_2, \bar{z}_2\}\right]$$

$$-\left(1 : \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2 \left[\{Z_1, z_1\}\left(\frac{dz_1}{d\bar{z}_1}\right)^2 - \{\bar{Z}_1, \bar{z}_1\} + \{z_1, \bar{z}_1\}\right]$$

Nun ist nach den Beziehungen

$$\frac{d^n Z}{dz^n} = \frac{d^n Z_i}{dz_i^n}, \quad (i=1,2); \quad \frac{d^n \bar{Z}}{d\bar{z}^n} = \frac{d^n \bar{Z}_i}{d\bar{z}_i^n}, \quad (i=1,2), \quad \frac{dz_1}{d\bar{z}_1} = \frac{dz_2}{d\bar{z}_2};$$

$$\{Z_2, z_2\} = \{Z_1, z_1\}, \qquad \{\bar{Z}_2, \bar{z}_2\} = \{\bar{Z}_1, \bar{z}_1\}.$$

Daher ist

$$[11] \qquad \{Z_2, \bar{Z}_2\} - \{Z_1, \bar{Z}_1\} = \left(1 : \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2 \left[\{z_2, \bar{z}_2\} - \{z_1, \bar{z}_1\}\right].$$

Also gilt der

Satz 2°. Die Grösse

$$(12) \qquad \{z_2, \bar{z}_2\} - \{z_1, \bar{z}_1\}$$

ist eine komplexe Relativinvariante dritter Ordnung der „m-Horn Angles" erster Ordnung.

Aus (6) und (11) ergibt sich der

Satz 3°. Die Grösse

$$[13] \qquad M_{12} = \frac{\dfrac{d^2 z_2}{d\bar{z}_2^2} : \dfrac{dz_2}{d\bar{z}_2} - \dfrac{d^2 z_1}{d\bar{z}_1^2} : \dfrac{dz_1}{d\bar{z}_1}}{\{z_2, \bar{z}_2\} - \{z_1, \bar{z}_1\}}$$

ist eine absolute Invariante dritter Ordnung der „m-Horn Angles" erster Ordnung.

Eine kurze Berechnung zeigt uns dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{dZ}{d\bar{Z}} = e^{2m\theta}, & \dfrac{d^2 Z}{d\bar{Z}^2} = 2me^{3m\theta}k, \\ \dfrac{d^3 Z}{d\bar{Z}^3} = 2me^{4m\theta}\left(\dfrac{dk}{ds} + 3mk^2\right), \end{cases}$$

worin

$$(15) \qquad ds = \sqrt{dx^2 - m^2 dy^2}, \qquad k = \frac{d\theta}{ds} = m\text{-Krümmung}$$

ist.

Nach (8), (11), (13) und (14) ist:

$$[16] \qquad \frac{d^2 z_2}{d\bar{z}_2^2} : \frac{dz_2}{d\bar{z}_2} - \frac{d^2 z_1}{d\bar{z}_1^2} : \frac{dz_1}{d\bar{z}_1} = k_2 - k_1,$$

$$[17] \qquad \{z_2, \bar{z}_2\} - \{z_1, \bar{z}_1\} = \frac{dk_2}{ds_2} - \frac{dk_1}{ds_1},$$

$$[18] \qquad M_{12}=\frac{\left(\frac{d^2z_2}{d\bar{z}_2^2}:\frac{dz_2}{d\bar{z}_2}-\frac{d^2z_1}{d\bar{z}_1^2}:\frac{dz_1}{d\bar{z}_1}\right)^2}{\{z_2,\bar{z}_2\}-\{z_1,\bar{z}_1\}}=2m\frac{(k_2-k_1)^2}{\frac{dk_2}{ds_2}-\frac{dk_1}{ds_1}}.$$

4. *Höhere Schwarzsche Ableitungen und m-konforme Invarianten ebener Kurven.* Die m-konforme Gruppe in der xy-Ebene ist durch

$$(19) \qquad Z=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad N(ad-bc)\neq 0,$$

$$(20) \qquad Z=\bar{z}$$

gegeben. Wir wollen zuerst lauter die Untergruppe $\mathfrak{G}$ der eigentlichen Transformationen (19) betrachten. Dann ist

$$\{Z,z\}=0, \qquad \{\bar{Z},\bar{z}\}=0,$$

so dass (10) wird zu:

$$[21] \qquad \{Z,\bar{Z}\}=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2\{z,\bar{z}\}.$$

Es besteht überhaupt:

$$(22) \qquad \{z,\bar{z}\}=-\left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)^2\{\bar{z},z\}.$$

Satz 4°. Die Grösse $\{z,\bar{z}\}$ ist eine Relativinvariante unter der m-konformen Gruppe (19), (20).

Die Beziehung (21) wird zu:

$$[23] \qquad \{Z,\bar{Z}\}\,d\bar{Z}^2=\{z,\bar{z}\}\,d\bar{z}^2.$$

Satz 5°. Die Grösse $\{z,\bar{z}\}\,d\bar{z}^2$ ist eine absolute Invariante unter der eigentlichen m-konformen Gruppe (19) *und ändert ihr Vorzeichen bei uneigentlichen Transformationen.*

Da, nun,

$$\{z,\bar{z}\}=2me^{2m\theta}\frac{dk}{ds}, \qquad d\bar{z}=e^{-i\theta}ds$$

ist, erhalten wir

$$[24] \qquad d\lambda^2=\frac{\epsilon}{2m}\{z,\bar{z}\}\,d\bar{z}^2=\epsilon\,dkds, \qquad (\epsilon=\pm 1).$$

λ ist die sogenannte Inversionalänge im Falle $m=i$[1].

1) Wegen des Falles $m=i$ siehe: H. Liebmann, Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven, Sitzungsberichte der Bayerschen Akad. d. Wiss., München, **1** (1923), S. 79. T. Kubota, Beiträge zur Inversionsgeometrie und Laguerre-Geometrie. Jap. J. Math., **1** (1924). T. Kubota, Beiträge zur Inversionsgeometrie. Tohoku Sci. Rep., **13** (1924–25), S. 243. T. Takasu, Natural Equations of Curves under Circular Point-Transformation Groups and their Duals. Jap. J. Math., **1** (1924). T. Takasu, „ , Tohoku Math. J., **25** (1925). T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Bd. **1** (1938), SS. 36, 39, 40, 42. F. Morley, On differential inversive geometry. Amer. J. Math., **46** (1926), S. 144. B. Patterson, The differential invariants of inversive geometry, ibid., **50** (1928), S. 553. E. Kasner, The Two Conformal Invariants of Fifth Order. Trans. Amer. Math. Soc., **44** (1938), S. 25. J. F. Feld, a. a. O., S. 323.

Differenziert man (21) zweimal, so folgt:

$$(25)\qquad \frac{d}{d\bar{z}}\{z,\bar{z}\}=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^3\frac{d}{d\bar{z}}\{z,\bar{z}\}-2\{z,\bar{z}\}\frac{d^2\bar{Z}}{d\bar{z}^2}:\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^4,$$

$$(26)\qquad \frac{d^2}{d\bar{Z}^2}\{Z,\bar{Z}\}=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2\frac{d^2}{d\bar{z}^2}\{z,\bar{z}\}-5\frac{d}{d\bar{z}}\{z,\bar{z}\}\frac{d^2\bar{Z}}{d\bar{z}^2}:\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^5$$
$$-2\{z,\bar{z}\}\left[\frac{d^3\bar{Z}}{d\bar{z}^3}:\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^5-4\left(\frac{d^2\bar{Z}}{d\bar{z}^2}\right)^2:\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^6\right].$$

Mit Rücksicht auf $\{Z,z\}=0$ erhält man aus (21), (24) und (25):

$$[27]\qquad \{Z,\bar{Z}\}_2=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2\{z,\bar{z}\}_2,$$

wobei überhaupt

$$[28]\qquad \{\zeta,\xi\}_2=\frac{\dfrac{d^2}{d\xi^2}\{\zeta,\xi\}}{\{\zeta,\xi\}}-\frac{5}{4}\left[\frac{\dfrac{d}{d\xi}\{\zeta,\xi\}}{\{\zeta,\xi\}}\right]^2$$

gesetzt ist. Hierbei wollen wir den Ausdruck $\{\zeta,\xi\}_2$ mit Herrn Feld die *zweite Schwarzsche Ableitung* nennen.

Satz 6°. Die zweite Schwarzsche Ableitung $\{z,\bar{z}\}_2$ *ist eine Relativinvariante fünfter Ordnung unter der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *der eigentlichen m-konformen Transformationen* ($m=e,h,p$).

Weiter definieren wir die $(n+1)$-te Schwarzsche Ableitung durch die Formel:

$$[29]\qquad \{z,\bar{z}\}_{n+1}=\frac{\dfrac{d^2}{d\bar{z}^2}\{z,\bar{z}\}_n}{\{z,\bar{z}\}_n}-\frac{5}{4}\left[\frac{\dfrac{d}{dz}\{z,\bar{z}\}_n}{\{z,\bar{z}\}_n}\right],$$

wobei

$$(30)\qquad \{z,\bar{z}\}_1=\{z,\bar{z}\}$$

gesetzt ist.

Nach der vollständigen Induktion von J. M. Feld[1] kann man die folgenden Sätze beweisen,

Satz 7°. Die n-te Schwarzsche Ableitung ($n=1,2,\ldots$) *ist eine Relativinvariante:*

$$[31]\qquad \{Z,\bar{Z}\}_n=\left(1:\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2\{z,\bar{z}\}_n,\qquad n\geqq 1$$

unter der Gruppe der eigentlichen m-konformen Transformationen.

Satz 8°. Die Verhältnisse

$$[32]\qquad \{z,\bar{z}\}_j:\{z,\bar{z}\}_k,\qquad j\neq k;\qquad j,k=1,2,3,\ldots,$$

sind sämtlich absolute Differentialinvarianten ebener Kurven unter der Gruppe der eigentlichen m-konformen Transformationen.

---

1) A. a. O., S. 324.

Es gilt besonderes die folgende Beziehung:

[33] $$I_5=\{z,\bar{z}\}_2:\{z,\bar{z}\}=1-\frac{m}{2}\Big[-\frac{d^3k}{ds^3}:m^2\Big(\frac{dk}{ds}\Big)^2+\frac{5}{4m^2}\Big(\frac{d^2k}{ds^2}\Big)^2:\Big(\frac{dk}{ds}\Big)^3-k^2:\frac{dk}{ds}\Big].$$

In der Tat ist

$$d\bar{z}=e^{-m\theta}ds\,,$$

$$\{z,\bar{z}\}=2me^{2m\theta}\frac{dk}{ds}\,,$$

$$\frac{d}{d\bar{z}}\{z,\bar{z}\}=2e^{3m\theta}\Big(m\frac{d^2k}{ds^2}+2m^2k\frac{dk}{ds}\Big),$$

$$\frac{d^2}{d\bar{z}^2}\{z,\bar{z}\}=2e^{4m\theta}\Big[m\frac{d^3k}{ds^3}+5m^2k\frac{d^2k}{ds^2}+6m^3k^2\frac{dk}{ds}+2m^2\Big(\frac{dk}{ds}\Big)^2\Big],$$

und also

[34] $$\{z,\bar{z}\}_2=e^{2m\theta}\Big[\frac{d^3k}{ds^3}:\frac{dk}{ds}-\frac{5}{4}\Big(\frac{d^2k}{ds^2}\Big)^2:\Big(\frac{dk}{ds}\Big)^2+m^2k^2+2m\frac{dk}{ds}\Big].$$

Die absolute Invariante

[35] $$I_5^*=-\frac{d^3k}{ds^3}:m^2\Big(\frac{dk}{ds}\Big)^2+\frac{5}{4m^2}\Big(\frac{d^2k}{ds^2}\Big)^2:\Big(\frac{dk}{ds}\Big)^3-k^2:\frac{dk}{ds}$$

wollen wir die *m-Inversionskrümmung* ($m=e,\,p,\,h$) nennen[1].

Mittels (24) kann man die folgende Formel beweisen:

[36] $$I_5^*=-\epsilon\big[2\{\lambda,s\}+m^2k^2\big]:m^2\Big(\frac{d\lambda}{ds}\Big)^2,$$

Aus (31) ergibt sich:

$$\{Z,\bar{Z}\}_k d\bar{Z}^2=\{z,\bar{z}\}_k d\bar{z}^2\,,\qquad k\geqq 1\,.$$

Also gilt der

Satz 9°. Die Grösse

[37] $$\lambda_k=\int\big[\{z,\bar{z}\}_k\big]^{\frac{1}{2}}d\bar{z}$$

ist eine Integralinvariante unter der Gruppe der eigentlichen konformen Transformationen. Tatsächlich gibt [37] *zwei reelle Integralinvarianten.*

5. *Konforme Invarianten der „m-Horn Angles".* Aus (31) ersehen wir, dass „m-Horn Angles" n-ter Ordnung ($n\geqq 1$) unter der Gruppe der eigentlichen m-konformen Transformationen die absolute Invariante $(2n+1)$-ter Ordnung

$$\{z_2,\bar{z}_2\}_k:\{z_1,\bar{z}_1\}_k\,,\qquad k\geqq 1$$

1) Wegen des Falles $m=i$, siehe: G. Mullins, Differential Invariants under the Inversion Group. Diss. Columbia (1917). H. Liebmann, a. a. O. T. Kubota, a. a. O. T. Takasu, a. a. O.; Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Bd. **I** (1938), S. 41–43.

hat. Jedoch können wir aus (31) noch andere Invarianten der „m-Horn Angles" herleiten.

Man betrachte ein „m-Horn Angle" $(2n+1)$-ter Ordnung $(n \geqq 1)$. Differenziert man (31), so folgt:

$$\frac{d}{d\bar{z}}\{Z, \bar{Z}\}_n = \left(1 : \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^3 \frac{d}{d\bar{z}}\{z, \bar{z}\}_n - 2\{z, \bar{z}\}_n \frac{d^2\bar{Z}}{d\bar{z}^2} : \left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^4. \tag{38}$$

Da das „m-Horn Angle" von der Ordnung $2k+1$ ist, ist an dieser Stelle:

$$\{Z_1, \bar{Z}_1\}_n = \{Z_2, \bar{Z}_2\}_n, \qquad \{z_1, \bar{z}_1\}_n = \{z_2, \bar{z}_2\}_n.$$

Folglich erhalten wir

$$\frac{d}{d\bar{Z}_2}\{Z_2, \bar{Z}_2\}_n - \frac{d}{d\bar{Z}_1}\{Z_1, \bar{Z}_1\}_n = \left(1 : \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^2 \left[\frac{d}{d\bar{z}_2}\{z_2, \bar{z}_2\}_n - \frac{d}{d\bar{z}_1}\{z_1, \bar{z}_1\}_n\right]. \tag{39}$$

Also gilt der

Satz 10°. Die Grösse

$$\frac{d}{d\bar{z}_2}\{z_2, \bar{z}_2\}_n - \frac{d}{d\bar{z}_1}\{z_1, \bar{z}_1\}_n \tag{40}$$

ist eine Relativinariante $(2n+2)$*-ter Ordnung vom Index* 3 *der „m-Horn Angles"* $(2n+1)$*-ter Ordnung* $(n \geqq 1)$ *unter der Gruppe der eigentlichen m-konformen Transformationen.*

Man betrachte ein „m-Horn Angle" $(2n+2)$-ter Ordnung $(n \geqq 1)$. Dann folgt nach (30) und (31):

$$\frac{d^2}{d\bar{Z}_2^2}\{Z_2, \bar{Z}_2\}_n - \frac{d^2}{d\bar{Z}_1^2}\{Z_1, \bar{Z}_1\}_n = \left(1 : \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}}\right)^4 \left[\frac{d^2}{d\bar{z}_2^2}\{z_2, \bar{z}_2\}_n - \frac{d^2}{d\bar{z}_1^2}\{z_1, \bar{z}_1\}_n\right]. \tag{41}$$

Also gilt der

Satz 11°. Die Grösse

$$\frac{d^2}{d\bar{z}_2^2}\{z_2, \bar{z}_2\}_n - \frac{d^2}{d\bar{z}_1^2}\{z_1, \bar{z}_1\}_n \tag{42}$$

ist eine Relativinvariante $(2n+3)$*-ter Ordnung* $(n \geqq 1)$ *vom Index* 4 *der „m-Horn Angles"* $(2n+2)$*-ter Ordnung unter der Gruppe der eigentlichen m-konformen Transformationen.*

Schlussbemerkung: *Die sämtlichen obigen Ergebnisse sind bei den allgemeineren konformen Ebenen von* $z = x + jy$, ($j^2 = \mu + \nu j$; μ, ν = reelle Zahlen) *ebenfalls gültig.*