76. *Einheitliche Theorie der Funktionen einer binären komplexen Veränderlichen*[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Neuerdings habe ich die Möbiussche Differentialgeometrie, die Laguerresche Differentialgeometrie und die Liesche Differentialgeometrie zum Falle der ähnlichen und ähnlich gelegenen allgemeinen Kegelschnitte und Konikoide mit Benutzung von binären komplexen Zahlen verallgemeinert[2]. Dabei habe ich geschrieben: „Unsre Geometrien erwähnen uns dass die Entwickelung der Funktionentheorie der hyperbolischen komplexen und parabolischen komplexen Veränderlichen auch wünschenswert ist.“ Dies bezwecke ich. In der Tat bestehen von den Gesichtspunkten der Bedeutungen, der Tiefen, der Umfänge und der Anwendungen aus ungefähr die folgenden Proportionen:

(Ellipse) : (Parabel) : (Hyperbel)

$$\begin{aligned}&=(\text{Theorie der } f(x+jy),\ j^2=\mu+\nu j,\ \nu^2+4\mu<0)\\ &:(\text{Theorie der } f(x+jy),\ j^2=\mu+\nu j,\ \sqrt{\nu^2+4\mu}=\text{Infinitesimale})\\ &:(\text{Theorie der } f(x+jy),\ j^2=\mu+\nu j,\ \nu^2+4\mu>0).\end{aligned}$$

Nun finden wir betreffs der Grundlage der Theorie der Funktionen einer parabolischen komplexen Veränderlichen $z=x+py$, ($p=$ Infinitesimale, $p^2=0$) einige Untersuchungen von E. Study[3], E. E. Kramer[4], J. C. Vignaux-Mischa Cotlar[5], C. Carbonaro[6] und J. C.

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche auf Kosten der Ausgaben des Unterrichtsministeriums für wissenschaftliche Forschung ausgeführt werden.

2) T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien. Proc. **16** (1940), 333-340; Abschnitt II, **17** (1941), 330-338. T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien. Proc. **16** (1940), 346-349; Abschnitt II, Proc. **17** (1941), 339-343. T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien. Proc. **16** (1940), 341-345; Abschnitt II, Proc. **17** (1941), 344-348.

3) E. Study, Geometrie der Dynamen, (1903), S. 195.

4) E. E. Kramer, Polygenic functions of the dual variable $w=u+jv$. Amer. J. Math., **52** (1930), 370-376.

5) J. C. Vignaux-Mischa Cotlar, Über die symmetrische Flächenderivierte der Funktionen einer dualen komplexen Variabeln (Spanisch). An Soc. Ci. Argent., **121** (1936), 128-133.

6) C. Carbonaro, Sulle funzioni di una variable biduale totalmente derivabili. Atti. Acad. naz. Lincei, Rend. VI. s. **25** (1936), 839-845.

Vignaux[7]. Begreffs der Grundlage der Theorie der Funktionen einer hyperbolischen komplexen Veränderlichen $z=x+hy$, $(h^2=+1)$ haben wir die Arbeiten von M. Goto[8] und Durañon y Vedia[9]. Betreffs der Grundlage der Theorie der Funktionen einer bikomplexen Veränderlichen finden wir die Arbeiten von D. G. Scorza[10] und N. Spampinato[11]. Betreffs der Grundlagen der Theorie der binären komplexen Veränderlichen $z=x+jy$, $(j^2=\mu+\nu j\,;\ \mu, \nu, x, y$: reelle Zahlen) haben wir die Arbeiten von J. Rey Pastor[12] und P. F. Capelli[13]. Diese beiden Herren haben die Ableitungstheorie schön gemacht. Bei Herrn J. Rey Pastor[14] finden wir für den Fall $j^2=-1$ die folgende Formel:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)+\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{Df(z)}{z-a}d\sigma\,, \tag{1}$$

welche aus P. Pompéiu[15] stammt. Bei seiner Beweisweise erhält man die Formel (1) „separando del dominio D del contorno C un entorno *circular* de z." Also fehlte es bei ihm die Formel (1) für den allgemeinen Fall $f(z)$, $(z=x+jy,\ j^2=\mu+\nu j)$. Nunmehr sind die Analoga von Potenzreihen, Taylorschen und Laurantschen Reihen — also die Verall-

---

7) J. C. Vignaux, Über die duale komplexe Zahl (Spanisch). An. Soc. Ci. Argent., **121** (1936), 108–127.

J. C. Vignaux, Über einfache und mehrfache konvergente Reihen von Funktionen einer dualen komplexen Variablen (Spanisch). An. Soc. Ci. Argent., **122** (1936), 3–45.

J. C. Vignaux, Geometrische Anwendung der radialen Ableitung einer dualen polygenen Funktionen (Spanisch). Contrib. estud. ci. fis. mat., **1** (1937), 381–387.

J. C. Vignaux, Die Theorie der polygenen Funktionen von einer oder mehreren dualen komplexen Variabeln. Contrib. estud. ci. fis. mat., **1** (1937), 383–387.

J. C. Vignaux, Theorie der Funktionen einer komplexen bidualen Veränderlichen (Spanisch). Contrib. estud. ci. fis. mat. (1938), 505–548.

J. C. Vignaux, Sur les fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales et de variables biduales. Atti. Acad. naz. Lincei, Rend. VI, s. **27** (1938), 514–518.

J. C. Vignaux, Sulle funzioni polygene di una variaile bicomplessa duale. II. Atti. Acad. naz. Lincei., VI. s. **27** (1938), 641–645.

8) M. Goto, Eigenschaften der hyperbolischen komplexen Zahlen und ihre Anwendungen (Japanisch). Auszug des Vortrages bei der 15. allgemeinen Sitzung der Japanischen Technikervereinigung (1939). M. Goto, Über den Anwendungen der hyperbolischen komplexen Zahlen (Japanisch). Auszug des Vortrages bei der 4. Sitzung der elektrotechnischen Abteilung der Japanischen Technikervereinigung (1940).

9) Durañon y Vedia, Sobre las funciones de una variable compleja hiperbólica, Contribución al Estudio de las ciencias fisicomatemáticas, **1** (1935).

10) D. G. Scorza, Sulle funzioni olomorphe di una variabile bicomplessa. Mem. Acad. Ital., **5** (1934), 597–605.

11) N. Spampinato, Sulla rapresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabile. Annali di Mat., **14** (1935–36), 305–325.

12) J. Rey Pastor, Funciones de variable compleja binaria. Boletin del Seminario Matematico, Buenos Aires, **19** (1936), 101–116.

13) P. F. Capelli, Sobre las funciones holomorphas y poligenas de una Variable compleja binaria. An. Soc. Ci. Argent., III. **128** (1939), 154–174. P. F. Capelli, Sur le nombre complexe binaire. Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941), 585–595. Die geometrische Bedeutung von $\bar{z}=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ und von $z^*=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ habe ich schon a. a. O. (1940) gefunden.

14) A. a. O., S. 106.

15) D. Pompéiu, Sur une classe de fonctions d'une variable complexe. Rend. Palermo, **33** (1912), 108–113.

gemeinerung der ganzen Funktionentheorie — wegen des Fehlens von (i) der Unterscheidung von Moduln von absolutem Betrag, (ii) dem Begriff des Grenzwertes, (iii) $\oint d\theta = 2\pi \frac{i}{j}$, (iv) der Integrationstheorie, (v) der j-Rektifizierbarkeit, (vi) Konvergenzellipsen und Konvergenzparallelenpaaren (Konvergenzparallelogrammen) usw. diesen beiden Herren noch nicht gelungen. Es ist mir schon gelungen durch geeignete Einführung dieser Begriffe — was mir anfangs schwierige Arbeit war — einzusehen wie man die ganze Funktionentheorie — allgemeine und spezielle — zum Falle der binären komplexen Veränderlichen $z=x+jy$ verallgemeinern kann. Im Folgenden möchte ich die wichtigsten Punkte kurz skizzieren und besonders die Formel (1) für den allgemeinsten Fall beweisen. Eine ausführliche Darstellung wird andereswo[16] erscheinen. Die Ergebnisse sind wenigstens in der Theorie der Minimalflächen in den elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Geometrie viel von Nutz.

1. *Bezeichnungen.* $z=x+jy=\rho\,(\operatorname{cosj}\theta+j\operatorname{sinj}\theta)=\rho e^{j\theta}$,

$$\bar{z}=x+\bar{j}y=\rho\,(\operatorname{cosj}\theta+\bar{j}\operatorname{sinj}\theta)=\rho e^{-j\theta},$$

$$j^2=\mu+\nu j, \quad j+\bar{j}=\nu, \quad j\bar{j}=-\mu; \quad \mu, \nu, x, y: \text{reelle Zahlen};$$

$$\operatorname{sinj}\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j-\nu}, \qquad \operatorname{cosj}\theta=\frac{j(e^{j\theta}+e^{-j\theta})-\nu e^{j\theta}}{2j-\nu},$$

$$\operatorname{cosj}^2\theta+\nu\operatorname{cosj}\theta\operatorname{sinj}j^2\theta-\mu\operatorname{sinj}^2\theta=1,$$

$$\rho^2=x^2+\nu xy-\mu y^2=z\bar{z}, \qquad \rho=\|z\|=\|\bar{z}\|.$$

2. *Modul und absoluter Betrag.* Die Grösse $\rho\equiv(x^2+\nu xy-\mu y^2)^{\frac{1}{2}}\equiv\|z\|$ nennen wir den (*binären*) *Modul* von z. Den absoluten Betrag $|z|=|\rho e^{j\theta}|=|\rho|\cdot|e^{j\theta}|$ im gewöhnlichen Sinne nennen wir den *absoluten Betrag*[17] von z. Er stimmt nur dann mit dem Modul überein, wenn $\nu^2+4\mu<0$ ist.

Die Gleichung $\rho^2=$konst. stellt im Falle $\nu^2+4\mu$

<0	$=0$	$=(\text{Infinitesimale})^2$	>0
eine *Ellipse*	ein *Geradenpaar*	eine *Parabel*[18]	eine *Hyperbel*

dar. *Im Falle*

$\nu^2+4\mu<0$ *ist* $\lvert z\rvert=\lvert\rho\rvert=\lvert\bar{z}\rvert$	$\nu^2+4\mu\geqq 0$ *ist* $\lvert z\rvert=\lvert\rho\rvert\cdot\lvert\rho e^{j\theta}\rvert$

gleich dem absoluten Betrag

16) T. Takasu, Einheitliche Theorie der Funktionen einer binären komplexen Veränderlichen $z=x+jy$, $(j^2=\mu+\nu j)$. I. Tohoku Sci. Rep., **29** (1941). Abschnitte II, III, ... sollen folgen.

17) Dieser Begriff und Nr. 3 (also die Formel (3)) machen den *Schlüssel* der ganzen Funktionentheorie. Im Falle $\nu^2+4\mu\geqq 0$ ist $x+jy$ wesentlich reell.

18) Dabei erfahren die auftretenden Konstanten Grenzprozesse.

$$|\,\|z\|\,|=|\,\|\bar{z}\|\,|$$

des Radiusvektors im Sinne der zu Grunde liegenden N. E. parabolischen Geometrie, bei welcher die Winkelmassbestimmung elliptisch ist. (Vgl. Nr. 3.)

$$\sqrt{1+j^2}\,p=|p \sec \varphi|$$

des Segmentes, welches die durch den Punkt $x=\rho \operatorname{cosj} \theta$, $y=\rho \operatorname{sinj} \theta$ *hindurchgehende isotrope Gerade*

$$\frac{x+jy}{\sqrt{1+j^2}}-p=0$$

auf der x-Achse ausschneidet.

Der Ort des Punktes z, wofür $|z|=$konst. *ist im Falle* $\nu^2+4\mu$

<0 *die Ellipse:*

$$x^2+\nu xy-\mu y^2=\text{konst.}$$

$\geqq 0$ *das isotrope Geradenpaar:*

$$(x+jy)^2=\text{konst.}$$

3. *Die zu Grunde liegenden N. E. Geometrien.* Wegen der zu Grunde liegenden N. E. parabolischen Geometrien und der Winkelmassbestimmung siehe meine frühere Arbeit[19]. Besonderes ist es zu bemerken, dass

$$dxdy=\rho d\rho \operatorname{sinj} d\theta=\frac{2j}{2j-\nu}\rho d\rho d\theta\,, \tag{2}$$

$$\oint d\theta=2\pi\frac{i}{j}\,. \tag{3}$$

Unter den EE-Geom., HE-Geom.	Unter den EP-Geom., HP-Geom.	Unter den EH-Geom., HH-Geom.

auf der Fläche $\xi^2+\nu\xi\eta-\mu\eta^2+\zeta^2=a^2$ und

PE-Geom.	PP-Geom.	PH-Geom.

haben wir *stereographische Projektionen:*

$$\xi=4a^2x:(x^2+\nu xy-\mu y^2+4a^2)\,,\qquad \eta=4a^2y:(x^2+\nu xy-\mu y^2+4a^2)\,,$$
$$\zeta=-a(x^2+\nu xy-\mu y^2-4a^2):(x^2+\nu xy-\mu y^2+4a^2)\,.$$

4. *Grenzwerte und Reihen.* Man sagt eine beschränkte Folge von binären komplexen Zahlen $z_1, z_2, \dots$ besitze einen *Grenzwert,* wenn es eine binäre komplexe Zahl z gibt derart, dass

$$\lim_{n\to\infty}|z_n-z|=0\,,\qquad (z_n-z \neq \text{Nullteiler} \neq 0)\,.$$

Eine Reihe heisst *konvergent,* wenn ihre Teilsummen einen endlichen Grenzwert besitzen. Es lässt sich den folgenden Satz beweisen: *Jede Potenzreihe* $\sum a_n z^n$ *besitzt im Falle* $\nu^2+4\mu$

<0 *eine Konvergenzellipse*

$\geqq 0$ *ein Konvergenzparallelenpaar*[20] *in isotroper Richtung*

von der folgenden Beschaffenheit. Für jedes z, das dem Inneren

dieser Konvergenzellipse

dieses Konvergenzparallelenpaars

19) T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien, 2. Proc. **17** (1941), Nr. 2-4.

20) Berücksichtigt man die Zweideutigkeit von j, so wird dies ein *isotropes Parallelogramm.*

angehört, konvergiert die Reihe absolut, für jedes z ausserhalb divergiert sie. Das Zentrum

der Ellipse	*des Parallelenpaars*

liegt bei $z=0$. *Sein Radius* ($|z|=$konst.) *ist* $r=1:\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

Wir schreiben $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$, wenn zu jedem positiven ε ein $\delta(\varepsilon)$ gehört derart, dass $|f(z)-A|<\varepsilon$ ($f(z)-A \neq$ Nullteiler $\neq 0$) ist, sobald

$$|z-a|<\delta(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |z-a|\neq 0 .$$

Gilt die Beziehung $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)$, so heisst die Funktion *stetig bei* $z=a$.

Dafür, dass $f(z)=u(x, y)+jv(x, y)$ *in einem Bereich B stetig sei, ist es im Falle* $\nu^2+4\mu$

<0 *notwendig,*	$\geqq 0$ *nicht notwendig*[21],

dass $u(x, y)$ *und* $v(x, y)$ *in B stetig sind. Denn die Metrik ist im Falle* $\nu^2+4\mu\geqq 0$ *nicht euklidisch.*

Der *Abelsche Grenzwertsatz* lässt sich beweisen.

5. *Konforme Abbildung. Die durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen sind winkeltreu an allen Stellen, wo ihre Ableitung* (die Derivierte ist in der Richtung der Nullteiler überhaupt nicht definiert) *nicht verschwindet. Dabei ist die Winkelmassbestimmung im Falle* $\nu^2+4\mu$

<0 *elliptisch.*	$\to 0$ *parabolisch.*	>0 *hyperbolisch.*

6. *Die Integrationstheorie.* Sie lässt sich *mit Benutzung unsres Begriffes von absolutem Betrag in Form* wie gewöhnlich aufstellen.

7. *Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.* Dies beweist man genau wie bei dem gewöhnlichen Cauchyschen Integralsatz.

8. *Verallgemeinerung der Beltramischen Integralformel* (1). *Es sei* $f(z)=u(x, y)+jv(x, y)$ *eine eindeutige, stetige, mit stetigen* u_x, u_y, v_x, v_y *versehene, in einem Bereich D definierte Funktion derart, dass ihre Flächenderivierte* $\dfrac{df}{dA}\equiv Df$ *existiert. Dann gilt die Formel:*

$$\text{(4)} \qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\int_G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\iint_D}\frac{Df(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta\,, \qquad (\zeta=\xi+j\eta).$$

Dabei sind $\overset{*}{\int}$ *und* $\overset{*}{\iint}$ *folgendermassen definiert:*

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\int}\varphi(\zeta, z)d\zeta=\int\Phi(\zeta, z)d\zeta\,, && \Phi(\zeta, z)=\varphi(\zeta, z)\,, && \textit{falls} \quad |\zeta-z|\neq 0\,,\\
& && \qquad\quad\ =0\,, && \textit{falls} \quad |\zeta-z|=0\,,\\
&\overset{*}{\iint}\psi(\zeta, z)d\xi d\eta=\iint\Psi(\zeta, z)d\xi d\eta\,, && \Psi(\zeta, z)=\psi(\zeta, z)\,, && \textit{falls} \quad |\zeta-z|\neq 0\,,\\
& && \qquad\quad\ =0\,, && \textit{falls} \quad |\zeta-z|=0\,;
\end{aligned}$$

und ist G eine beliebige in D gelegene geschlossene Kurve.

21) Berücksichtigt man jedoch die Zweideutigkeit von j, so werden die Stetigkeit von $f(z)$ und die von u, v gleichbedeutend.

I. Beweis. Setzt man $Df(z)=u_1(x,y)+jv_1(x,y)$, so ist $u_1=\mu v_x-u_y$, $v_1=u_x+\nu v_x-v_y$, dessen Sonderfall $u_1=0$, $v_1=0$ den verallgemeinerten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen entspricht. Ist A der Flächeninhalt einer in D gelegenen Kurve C, so ist nach der Greenschen Formel:

$$\int_C f(z)dz=\iint_A Df(z)dxdy\,. \tag{5}$$

Das Integral $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\overset{*}{\iint}_D \dfrac{Df(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta$ definiert eine stetige Funktion von z in D[22].

---

22) Es beweist man folgendermassen. Es ist für jede zwei Punkte z' und z'' in D: $F(z')-F(z'')=(z'-z'')\overset{*}{\iint}_D \dfrac{Df(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}d\xi d\eta$. Wir teilen D mittels der Geraden $|z-z'|=|z-z''|$ in zwei, bzw. z' und z'' enthaltenden Teilen D' und D'', was immer möglich ist, wenn z' und z'' genügend nahe liegen. Diese Gerade geht durch den Mittelpunkt $\dfrac{1}{2}(z'+z'')$ hindurch und steht im Falle $\nu^2+4\mu$

<table>
<tr><td><0 konjugiert zur Verbindungsgeraden von z' und z''.</td><td>$\geqq 0$ parallel zur Geraden $x+jy=0$.</td></tr>
</table>

Also ist

$$I\equiv\overset{*}{\iint}_D \frac{Df(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}d\xi d\eta=\overset{*}{\iint}_{D'} \frac{Df(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}d\xi d\eta+\overset{*}{\iint}_{D''} \frac{Df(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}d\xi d\eta\,.$$

Setzt man weiter $\zeta-z'=r'e^{j\theta'}$, $\zeta-z''=r''e^{j\theta''}$ und führt man M derart ein, dass $\left|\dfrac{df(\zeta)}{dA}\right|\leqq M$ in D, so ist $|r'|=|\zeta-z'|\cdot|e^{-j\theta'}|$ und folglich ist nach (2):

$$|I'|\equiv\left|\overset{*}{\iint}_{D'} \frac{Df(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}d\xi d\eta\right|\leqq M\left|\frac{2j}{2j-\nu}\right|\overset{*}{\iint}_{D'}\frac{|r'|\cdot|\delta r'|\cdot|d\theta'|}{|\zeta-z'|\cdot|\zeta-z''|}$$

$$=M\cdot\left|\frac{2j}{2j-\nu}\right|\overset{*}{\iint}_{D'}\frac{|e^{-2j\theta'}|\cdot|\delta(\zeta-z')|\cdot|d\theta'|}{|\zeta-z''|}=M\cdot\left|\frac{2j}{2j-\nu}\right|\int_0^{2\pi\frac{i}{j}}|e^{-2j\theta'}|\cdot|d\theta'|\overset{*}{\int_0^{\rho'}}\frac{|\delta(\zeta-z')|}{|\zeta-z''|}\,,$$

worin ρ' eine gewisse stetige Funktion von θ' und $|\zeta-z''|$, welches nur dann Null wird, wenn $\zeta-z''$, dem gehebten Fall entsprechend, ein Nullteiler wird, bei festem θ' eine gewisse stetige Funktion von $|\zeta-z'|$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\rho''(\theta')$ derart, dass $\displaystyle\int_0^{\rho'}\frac{|\delta(\zeta-z')|}{|\zeta-z''|}=\frac{1}{\rho''}\int_0^{\rho'}|\delta(\zeta-z')|=\frac{\rho'}{\rho''}=1-\varepsilon<1$ ist. (Dabei wird ρ' Nullteiler, wenn ρ'' ein Nullteiler wird; ihr Verhältnis $\dfrac{\rho'}{\rho''}$ bleibt aber als Eins in der Grenze $\rho''\to$ Nullteiler.) Daher ist

$$\overset{*}{\iint}_{D'}\frac{|e^{-2j\theta'}|\cdot|\delta(\zeta-z')|\cdot|d\theta'|}{|\zeta-z''|}\leqq\int_0^{2\pi\frac{i}{j}}|e^{-2j\theta'}|\cdot|d\theta'|$$

<table>
<tr><td>$=\left|\int_0^{2\pi\frac{i}{j}}|d\theta'|\right|=2\pi:|j|$ im Falle $\nu^2+4\mu<0$.
Daher ist $|I'|\leqq M\cdot\dfrac{4\pi}{|2j-\nu|}$.</td><td>$=\dfrac{2e^{2|j|\infty}}{|j|}$ im Falle $\nu^2+4\mu>0$, od. $\to 0$.
Daher ist $|z'-z''|\cdot|I'|\to|\text{Nullteiler}|$.</td></tr>
</table>

Ebenso dem Bereich D'' entsprechend erhält man (Vgl. Fussnote 25):

<table>
<tr><td>$|I''|\leqq M\cdot\dfrac{4\pi}{(2j-\nu)}$.</td><td>$|z'-z''|\cdot|I''|\to|\text{Nullteiler}|$.</td></tr>
</table>

Schliesslich erhalten wir also:

<table>
<tr><td>$|I|\leqq|I'|+|I''|\leqq\dfrac{8\pi M}{|2j-\nu|}$.</td><td>$|z'-z''|\cdot|I|\to|\text{Nullteiler}|$.</td></tr>
</table>

Folglich ist $F(z)$ in D stetig.

Setzt man weiter

$$(6)\qquad f(z) \equiv h(z) + \frac{1}{2\pi i} \overset{*}{\iint} \frac{Df(\zeta)}{z-\zeta} d\xi d\eta ,$$

so ist $h(z)$ eine in D stetige Funktion. Ich möchte zeigen, dass für eine beliebige in D gelegene geschlossene Kurve C $\int_C h(z)dz = 0$ ist. Aus (6) folgt, wie man leich einsieht:

$$(7)\qquad \int_C f(z)dz = \int_G h(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C dz \overset{*}{\iint}_D \frac{Df(\zeta)}{z-\zeta} d\xi d\eta .$$

Da wir $z-\zeta = re^{j\varphi}$, $\left(r=\sqrt{(x-\xi)^2+\nu(x-\xi)(y-\eta)-\mu(y-\eta)^2} \neq 0\right)$ setzen können, ist $\dfrac{dz}{\zeta-z} = \dfrac{dr}{r} + jd\theta$. Trotzdem r und $e^{j\varphi}$ im Falle $\nu^2+4\mu \geqq 0$ komplexe Zahlen (im gewöhnlichen Sinne) sein können, ist $re^{j\varphi}$ als Ganzes immer reell. Wir können die geschlossene Kurve C durch Hinzunahme

einer Ellipse $r=$konst. mit Zentrum ζ und Radius-Vektor r im Falle $\nu^2+4\mu<0$	eines Parallelenpaares $r=$konst. als Grenzfigur der Hyperbeln mit Zentrum ζ und Radiusvektor r im Falle $\nu^2+4\mu=$(Infinitesimale)^2	der konjugierten Hyperbeln $r=$konst. mit Zentrum ζ und Radiusvektor r im Falle $\nu^2+4\mu>0$

erweitern, so dass C wieder in der Grenze durch

diese Ellipse	dieses Parallelenpaar	diese Hyperbeln

ersetzt wird und ist in den sämtlichen Fällen:

$$j\int_{(\zeta,r)} d\varphi = 2\pi\frac{i}{j}j = 2\pi i ,$$

$$\overset{*}{\int}_{C-(\zeta,r)} \frac{dz}{z-\zeta} = \overset{*}{\int}_C \frac{dz}{z-\zeta} - \overset{*}{\int}_{(\zeta,r)} \frac{dz}{z-\zeta} = \overset{*}{\int}_C \frac{dz}{z-\zeta} - \overset{*}{\int}_{(\zeta,r)} \frac{dr}{r} - j\int_{(\zeta,r)} d\varphi = 0 .$$

Da jetzt $r=$konst. $\neq 0$ ist, erhalten wir daraus $\int_C \dfrac{dz}{z-\zeta} = 2\pi i$. Also wird (7) zu: $\int_C f(z)dz = \int_C h(z)dz + \overset{*}{\iint}_D Df(\zeta)d\xi d\eta$, woraus nach (5) $\int_C h(z)dz = 0$ folgt. Wendet man den Operator $\dfrac{1}{2\pi i}\overset{*}{\int}_G \dfrac{\cdots\cdots}{z-\zeta}dz$ mit einer beliebigen in D gelegenen geschlossenen Kurve G auf die beiden Seiten von (6) an (die Richtigkeit ist naheliegend), so folgt:

$$(8)\qquad \frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\int}_G \frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\int}_G \frac{h(z)}{z-\zeta}dz + \frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\iint}_D Df(\zeta)d\xi d\eta \overset{*}{\int}_G \frac{dz}{(z-\zeta)^2} .$$

Nun ist offenbar:

$$(9) \qquad \overset{*}{\int}_G \frac{dz}{(z-\zeta)^2}=0\,.$$

Weiter ist nach (7):

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\int}_G \frac{h(z)}{z-\zeta}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_G h(\zeta+re^{j\varphi})\Big(\frac{d|r|}{|r|}+jd\varphi\Big)=h(\zeta)$$

in der Grenze $|r|\to 0$ (also $z\to\zeta$), wenn wir G wie bei C letzten Falles behandeln. Aus (8), (9) und (10) ergibt sich: $h(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\overset{*}{\int}_G \frac{f(z)}{z-\zeta}dz.$ Folglich wird (6) schliesslich zu (4), wenn man z mit ζ vertauscht.

II. Beweis (für den Fall, dass G der Rand von D ist). Die Funktion $F(z)=\frac{f(z)}{z-\zeta}=P(x,y)+jQ(x,y)$, $(|z-\zeta|\mp 0)$ ist eine eindeutige, stetige, mit stetigen P_x, P_y, Q_x, Q_y versehene, in dem Bereich D definierte Funktion, derart, dass ihre Flächenderivierte $\frac{dF(z)}{dA}=\frac{\partial F(z)}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}:(z-\zeta)$ existiert. Dabei ist ζ irgend ein Punkt in D. Betrachten wir wieder wie bei $\zeta-(\zeta,r)$ die geschlossene Kurve $G-(\zeta,\rho)$ und wendet die Formel (5) auf $F(z)$ an[23], so ergibt sich:

$$(12) \qquad \overset{*}{\int}_{G-(\zeta,\rho)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz=\overset{*}{\iint}_{G-(\zeta,\sigma)} \frac{Df(z)}{z-\zeta}dxdy\cdot \qquad (\rho=\text{konst.})\,.$$

Nun ist

$$\overset{*}{\int}_{G-(\zeta,\rho)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz=\overset{*}{\int}_G \frac{f(z)}{z-\zeta}dz+\overset{*}{\int}_{(\zeta,\rho)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz=\overset{*}{\int}_G+\overset{*}{\int}_{(\zeta,\rho)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz+\overset{*}{\int}_{(\zeta,\rho)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz$$

$$=\overset{*}{\int}_G+\overset{*}{\int}_{(\zeta,\rho)} f(\zeta+\rho e^{j\theta})\Big(\frac{d\rho}{\rho}+jd\theta\Big)=\overset{*}{\int}_G -2\pi i f(\zeta)$$

wie üblich in der Grenze $\rho\to 0$. Ist $Df(z)=u_1+jv_1$, $|u_1|\leqq M$, $|v_1|\leqq N$ in G, so ist

$$\left|\Re\overset{*}{\iint}_{(\zeta,\rho)} \frac{Df(z)}{z-\zeta}dxdy\right|=\left|\frac{2j}{2j-\nu}\right|\cdot\left|\overset{*}{\iint}_{(\zeta,\rho)} u_1\frac{\rho d\rho d\theta}{\rho e^{j\theta}}\right|^{24)}$$

$$\leqq M\cdot\left|\frac{2}{2j-\nu}\right|\cdot\left|\int_{\theta=0}^{2\pi-\frac{i}{j}} d|e^{-j\theta}|\int_0^{|\rho|} d|\rho|\right|\leqq\frac{8M}{|2j-\nu|}|\text{Nullteiler}|^{25)}.$$

Ebenso ist $\left|\Im\overset{*}{\iint}_{(\zeta,\rho)} \frac{Df(z)}{z-\zeta}\right|dxdy\right|\leqq\frac{8N}{|2j-\nu|}|\text{Nullteiler}|.$

23) Dabei teile ich G im Falle $\nu^2+4\mu>0$ (bzw. $\to 0$) im Voraus durch die isotropen Geraden durch ζ in 5 (bzw. 3) Teilen und addiere die Resultate.

24) Hier betrachtet man $\lim \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho e^{j\theta}}=\frac{d\rho d\theta}{e^{j\theta}}$ ($\rho\to$ Nullteiler) für die Nullteiler ρ.

25) $|\rho e^{\pm j\theta}|$ bei $|\rho|\to 0$, $\theta\to\infty$.

Also ist $\lim_{|\rho|\to 0} \overset{*}{\iint}_{(\zeta,\rho)} \frac{Df(z)}{z-\zeta} dxdy = 0$. Folglich wird (12) zu:

$$\overset{*}{\int}_G \frac{f(z)}{z-\zeta} dz - 2\pi i f(\zeta) = \overset{*}{\iint}_G \frac{Df(z)}{z-\zeta} dxdy .$$

9. *Taylorsche und Laurentsche Reihen.* Im Falle, dass $f(z)$ analytisch ist, verschwindet $Df(z)$ und die Formel (4) reduziert sich zur verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \overset{*}{\int}_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta , \tag{13}$$

welche zur Formel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \overset{*}{\int}_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

sowie zu den *Taylorschen* und *Laurentschen Reihen* führt.

Auf Grund von Nr. 7 kann man (13) auch sehr leicht unmittelbar beweisen.

N. B. Nun bin ich im Stande die ganze Funktionentheorie — allgemeine und spezielle — zum Falle der binären komplexen Veränderlichen zu verallgemeinern.