74. Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien, 2[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

1. *Einleitung.* Im ersten Abschnitt[2] habe ich eine gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien des Falles

des orientierten Kreises	der orientierten Hyperbel	der orientierten Parabel

$$(x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2, \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

$m=i$,	$m=h$,	$m=p=$ Infinitesimale,
$i^2=-1$	$h^2=+1$	$p^2=0$

sowie des Falles

der orientierten Kugel	des orientierten Hyperboloides	des orientierten Paraboloides

$$-m^2(x-a)^2+(y-b)^2+\epsilon(z-c)^2=\varepsilon r^2, \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

$\epsilon=+1$,	$\epsilon=-1$,	$\epsilon=\pm 1$,
$m=i$,	$m=h$,	$m=p=$ Infinitesimale,
$i^2=-1$	$h^2=+1$	$p^2=0$

mitgeteilt. Im Folgenden möchte ich die genannten Geometrie zum Falle der allgemeinsten ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte und Konikoide verallgemeinern.

2. *j-Laguerresche Geometrie in der Ebene.* Im Folgenden werden diejenigen N. E. parabolischen Geometrien, welche ich in der letzten Abhandlung[3] eingeführt habe, zu Grunde gelegt. Dabei war die Formel für das Quadrat des Abstandes folgendes:

$$(x-x')^2+\nu(x-x')(y-y')-\mu(y-y')^2.$$

Verwandelt man die Gleichung

$$(1)\qquad (x-a)^2+\nu(x-a)(y-b)-\mu(y-b)^2=\left\{(x-a)^2+\frac{\nu}{2}(y-b)\right\}^2 -\frac{\nu^2+4\mu}{4}(y-b)^2=\varepsilon r^2, \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Proc. **16** (1940), 346.

3) Proc. **17** (1941), 330, Nr. 3. Dabei spielten die binären komplexen Zahlen $z=x+jy$, ($j^2=\mu+\nu j$; μ, ν, x, y: reelle Zahlen) wichtige Rolle.

einer

Ellipse | Hyperbel | Parabel

in Tangentialgleichung, so erhält man

$$(2)\qquad \frac{2(x-a)+\nu(y-b)}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}a+\frac{\nu(x-a)-2\mu(y-b)}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}b-P=\sqrt{\varepsilon}\,r,$$

wo

$$P=\frac{(2a+\nu b)(x-a)-(2\mu b-\nu a)(y-b)+\varepsilon r^2}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}$$

ist.

Setzt man

$$[3]\qquad \mathfrak{u}_1=\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r},\quad \mathfrak{u}_2=\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r},\quad \mathfrak{u}_3=i,\quad \mathfrak{u}_4=-P,$$

und

$$[4]^{4)}\qquad \xi_1=a+\frac{\nu}{2}b,\quad \xi_2=\frac{\nu}{2}a-\mu b,\quad \xi_3=i\sqrt{\varepsilon}\,r,\quad \xi_4=1,$$

so wird (2) zu:

$$[5]\qquad (\mathfrak{u}\xi)_4=0,\qquad (\xi_4=1),$$

wobei nach (1) ist:

$$[6]\qquad \mathfrak{u}_1^2+\nu\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2-\mu\mathfrak{u}_2^2=1.$$

Die entsprechende Geometrie möchte ich die *j-Laguerresche Geometrie* in der Ebene nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist

---

4) Im Falle, dass $\sqrt{\nu^2+4\mu}=p=$Infinitesimale ist, wird (1) zu:

$$\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b'+b'-b)\right\}^2-\frac{p^2}{4}(y-b)^2-\varepsilon r^2=0$$

d. h.

$$\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-\nu(b'-b)\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(b'-b)\right\}$$
$$-\frac{\nu^2}{4}(b'-b)+\frac{p^2}{2}b(y-b')+\frac{p^2}{2}bb'-\frac{p^2}{4}b^2-\varepsilon r^2=0,$$

welche etwa in

$$\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-4d\left\{m(x-a)+(y-b')\right\}=0$$

übergehen muss. Durch Vergleichung der Koeffizienten von $(x-a)$, $(y-b')$ usw. von den beiden letzten Gleichungen erhalten wir: $-8d=p^2b$, $\nu(b'-b)=4dm$ und $\frac{3}{4}\nu^2(b'-b)^2+\frac{p^2}{2}bb'-\frac{p^2}{4}b^2-\varepsilon r^2=0$. Aus den beiden ersten folgt: $m=2\nu(b'-b)/p^2b$. Also erhält man

$$\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-4d\left\{\frac{2\nu(b'-b)}{p^2b}(x-a)+(y-b')\right\}=0,$$

worin $\sqrt{\varepsilon}\,r=\frac{1}{2}\sqrt{3\nu^2(b'-b)^2+p^2(2bb'-b^2)}$ ist. [4] wird jetzt zu:

$$\xi_1=a-\frac{4\nu d}{p^2},\quad \xi_2=\frac{\nu}{2}a+\frac{8\mu d}{p^2},\quad \xi_3=\frac{i}{2}\sqrt{3\nu^2(b'-b)^2+p^2(2bb'-b^2)},\quad \xi_4=1.$$

$$[7]^{5)}\quad (\xi_1-\bar{\xi}_1)^2+\nu(\xi_1-\bar{\xi}_1)(\xi_2-\bar{\xi}_2)-\mu(\xi_2-\bar{\xi}_2)^2+(\xi_3-\bar{\xi}_3)^2$$
$$=\left\{(a-\bar{a})+\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})\right\}^2+\nu\left\{(a-\bar{a})+\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})\right\}\left\{\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})\right.$$
$$\left.-\mu(b-\bar{b})\right\}-\mu\left\{\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})-\mu(b-\bar{b})\right\}^2-(r-\bar{r})^2.$$

3. *j-Laguerresche Geometrie im Raume.* Verwandelt man die Gleichung

$$[8]\quad \mu(x-a)^2-\nu(x-a)(y-b)-(y-b)^2-\lambda(z-c)^2+\varkappa(y-b)(z-c)$$
$$+\tau(z-c)(x-a)=\varepsilon r^2$$

in Tangentialgleichung, so erhält man:

$$(9)\quad \frac{2\mu(x-a)-\nu(y-b)+\tau(z-c)}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}a+\frac{-\nu(x-a)-2(y-b)+\varkappa(z-c)}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}b$$
$$+\frac{\tau(x-a)+\varkappa(y-b)-\lambda(z-c)}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}c-P=\sqrt{\varepsilon}\,r,$$

worin

$$[10]\quad P=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}[(-2a\mu+b\nu-c\tau)(x-a)+(\nu a+2b-\varkappa c)(y-b)$$
$$+(-\tau a-\varkappa b+\lambda c)(z-c)]-\sqrt{\varepsilon}\,r$$

gesetzt ist.

Setzt man weiter

$$[11]\quad \mathfrak{u}_1=\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\,r},\quad \mathfrak{u}_2=\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\,r},\quad \mathfrak{u}_3=\frac{z-c}{\sqrt{\varepsilon}\,r},\quad \mathfrak{u}_4=i,\quad \mathfrak{u}_5=-P$$

und

$$[12]^{6)}\quad \begin{cases} \xi_1=\mu a-\frac{\nu}{2}b+\frac{\tau}{2}c, & \xi_2=-\frac{\nu}{2}a-b+\frac{\varkappa}{2}c, \\ \xi_3=\frac{\tau}{2}a+\frac{\varkappa}{2}b-\lambda c, & \xi_4=i\sqrt{\varepsilon}\,r, \qquad \xi_5=1, \end{cases}$$

---

5) Im Falle $\sqrt{\nu^2+4\mu}=p=$Infinitesimale wird [7] zu: $\left\{a-\bar{a}-\frac{4d}{p^2}(d-\bar{d})\right\}^2$
$+\nu\left\{a-\bar{a}-\frac{4d}{p^2}(d-\bar{d})\right\}\left\{\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})+\frac{8\mu}{p^2}(d-\bar{d})\right\}-\mu\left\{\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})+\frac{8\mu}{p^2}(d-\bar{d})\right\}^2$
$$-\frac{1}{4}\left\{\sqrt{3\nu^2\left(b'+\frac{8d}{p^2}\right)^2-16b'd-\frac{64d^2}{p^2}}-\sqrt{3\nu^2\left(\bar{b}'+\frac{8\bar{d}}{p^2}\right)^2-16\bar{b}'\bar{d}-\frac{64\bar{d}^2}{p^2}}\right\}^2.$$

6) Im Falle, dass [8] ein Paraboloid $\mu(x-a')^2-\nu(x-a')(y-b)-(y-b)^2-\lambda(z-c)^2+\varkappa(y-b)(z-c)+\tau(z-c)(x-a')-4d\left\{(x-a')-\frac{\nu}{2\mu}(y-b)+\frac{\tau}{2\mu}(z-c)\right\}=0$ wird, ist $2d=\mu(a-a')$, $\sqrt{\varepsilon}\,r=\sqrt{\mu}\,(a-a')$ und

$$\begin{vmatrix} \mu & -\frac{\nu}{2} & \frac{\tau}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & -1 & \frac{\varkappa}{2} \\ \frac{\tau}{2} & \frac{\varkappa}{2} & -\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left[\left(\lambda-\frac{\varkappa^2}{4}\right)(\nu^2+4\mu)+\left(\tau+\frac{\nu\varkappa}{2}\right)^2\right]=0.$$

Dann wird [12] zu:

$\xi_1=2d+\mu a'-\frac{\nu}{2}b+\frac{\tau}{2}c,\ \xi_2=-\frac{\nu}{\mu}d-\frac{\nu}{2}a'-b+\frac{\varkappa}{2}c,\ \xi_3=\frac{\tau}{\mu}d+\frac{\tau}{2}a'+\frac{\varkappa}{2}b-\lambda c,\ \xi_4=\frac{2d}{\sqrt{\mu}},\ \xi_5=1.$

so wird (9) zu:

$$[13] \qquad (\mathfrak{u}\xi)_5=0\,, \qquad (\xi_5=1)\,,$$

wobei nach [8] ist:

$$[14] \qquad \mu\mathfrak{u}_1^2-\nu\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2-\mathfrak{u}_2^2-\lambda\mathfrak{u}_3^2+\varkappa\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3+\tau\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_4^2=0\,.$$

Die entsprechende Geometrie möchte ich *j-Laguerresche Geometrie* in Raume nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist:

$$\begin{aligned}
[15]^{7)} \quad & \mu(\xi_1-\xi_1)^2-\nu(\xi_1-\bar{\xi}_1)(\xi_2-\bar{\xi}_2)-(\xi_2-\bar{\xi}_2)^2-\lambda(\xi_3-\bar{\xi}_3)^2+\varkappa(\xi_2-\bar{\xi}_2)(\xi_3-\bar{\xi}_3) \\
& \qquad +\tau(\xi_3-\bar{\xi}_3)(\xi_1-\bar{\xi}_1)+(\xi_4-\bar{\xi}_4)^2 \\
& =\mu\left\{\mu(a-\bar{a})-\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})+\frac{\tau}{2}(c-\bar{c})\right\}^2-\nu\left\{\mu(a-\bar{a})-\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})\right. \\
& \quad \left.+\frac{\tau}{2}(c-\bar{c})\right\}\left\{-\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})-(b-\bar{b})+\frac{\varkappa}{2}(c-\bar{c})\right\}-\left\{-\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})\right. \\
& \quad \left.-(b-\bar{b})+\frac{\varkappa}{2}(c-\bar{c})\right\}^2-\lambda\left\{\frac{\tau}{2}(a-\bar{a})+\frac{\varkappa}{2}(b-\bar{b})-\lambda(c-\bar{c})\right\}^2 \\
& \quad +\varkappa\left\{-\frac{\nu}{2}(a-\bar{a})-(b-\bar{b})+\frac{\varkappa}{2}(c-\bar{c})\right\}\left\{\frac{\tau}{2}(a-\bar{a})\right. \\
& \quad \left.+\frac{\varkappa}{2}(b-\bar{b})-\lambda(c-\bar{c})\right\}+\tau\left\{-\frac{\tau}{2}(a-\bar{a})+\frac{\varkappa}{2}(b-\bar{b})\right. \\
& \quad \left.-\lambda(c-\bar{c})\right\}\left\{\mu(a-\bar{a})-\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})+\frac{\tau}{2}(c-\bar{c})\right\}-(r-\bar{r})^2\,.
\end{aligned}$$

4. *Algebraische j-Laguerresche Geometrie und j-Laguerresche Differentialgeometrie. Die algebraische j-Laguerresche Geometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen algebraischen Geometrie im Buch:*

J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, (1916) *entwickeln.*

Die j-Laguerresche Differentialgeometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen Laguerreschen Differentialgeometrie im Buch:

T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Band II. Laguerresche Differentialkugelgeometrie. (1939) *entwickeln.*

7) Im Falle, dass [8] ein Paraboloid $\mu(x-a')^2-\nu(x-a')(y-b)-(y-b)^2-\lambda(z-c)^2+\varkappa(y-b)(z-c)+\tau(z-c)(x-a')-4d\left\{(x-a')-\frac{\nu}{2\mu}(y-b)+\frac{\nu}{2\mu}(z-c)\right\}=0$ ist, wird [15] zu:

$$\begin{aligned}
& \mu\left\{2(d-\bar{d})+\mu(a'-\bar{a}')-\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})+\frac{\tau}{2}(c-\bar{c})\right\}^2-\nu\left\{2(d-\bar{d})+\mu(a'-\bar{a}')-\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})+\frac{\tau}{2}(c-\bar{c})\right\} \\
& \times\left\{-\frac{\nu}{\mu}(d-\bar{d})-\frac{\nu}{2}(a'-\bar{a}')-(b-\bar{b})+\frac{\varkappa}{2}(c-\bar{c})\right\}-\left\{-\frac{\nu}{\mu}(d-\bar{d})-\frac{\nu}{2}(a'-\bar{a}')-(b-\bar{b})+\frac{\varkappa}{2}(c-\bar{c})\right\}^2 \\
& -\lambda\left\{\frac{\tau}{\mu}(d-\bar{d})+\frac{\tau}{2}(a'-\bar{a}')+\frac{\varkappa}{2}(b-\bar{b})-\lambda(c-\bar{c})\right\}^2+\varkappa\left\{-\frac{\nu}{\mu}(d-\bar{d})-\frac{\nu}{2}(a'-\bar{a}')-(b-\bar{b})+\frac{\varkappa}{2}(c-\bar{c})\right\} \\
& \times\left\{\frac{\tau}{\mu}(d-\bar{d})+\frac{\tau}{2}(a'-\bar{a}')+\frac{\varkappa}{2}(b-\bar{b})-\lambda(c-\bar{c})\right\}+\tau\left\{\frac{\tau}{\mu}(d-\bar{d})+\frac{\tau}{2}(a'-\bar{a}')+\frac{\varkappa}{2}(b-\bar{b})-\lambda(c-\bar{c})\right\} \\
& \times\left\{2(d-\bar{d})+\mu(a'-\bar{a}')-\frac{\nu}{2}(b-\bar{b})+\frac{\tau}{2}(c-\bar{c})\right\}+\frac{4}{\mu}(d-\bar{d})^2.
\end{aligned}$$

5. *Herleitung einer neuen parabolischen Geometrie.* Adjungiert man zum j-Laguerresche Raume den linearen

Ellipsoiden-	Hyperboloiden-	Paraboloiden-

komplex $\xi_4=0$, so geht jedes

Ellipsoid	Hyperboloid	Paraboloid

in einen Kegel mit dem Scheitel (a, b, c) über und die Gleichung [13] wird zu

$$(\mathfrak{u}\xi)_3-P=0\,,$$

wobei nach [14]

$$\mu\mathfrak{u}_1^2-\nu\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2-\mathfrak{u}_2^2-\lambda\mathfrak{u}_3^2+\varkappa\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3+\tau\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1=1$$

ist. Also geht der j-Laguerresche Raum in einen parabolischen Raum über, in welchem das Winkelmass

elliptisch	hyperbolisch	parabolisch

ist.

Entsprechendes gilt auch für die Ebene.

Berichtung zum I. Abschnitt:

Seite	Linie	für	lies
347	Fussnote	$(z-c)_2$	$(z-c)^2$
348	4	R_5	R_4
„	34	$(x-a)^2=4d\cdot\left(y-\frac{d}{p^2}\right)$	$(y-b)^2+\epsilon(z-c)^2=4d\left(x-\frac{d}{p^2}\right)$ od. $(y-b)^2+\epsilon(z-c)^2=0$