71. Über die allgemeinen algebraischen Systeme I.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die systematische Einführung der Begriffe in der modernen Algebra, etwa Verbände, Gruppen, Ringe, Körper, freie Gruppen, freie Produkte u. s. w.

§ 1. *Isomorphismus der algebraischen Systeme.* Eine Menge $\mathfrak{A}$ mit den Verknüpfungen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ heisst ein *algebraisches System*[1], wenn $a\alpha b$ für gewisse Paar a, b aus $\mathfrak{A}$ als ein Element aus $\mathfrak{A}$ eindeutig definiert ist. Die Menge der Verknüpfungen bezeichnen wir mit V.

Es sei eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}$ vorgegeben: $\mathfrak{A}=A_1+A_2+\cdots$, $A_i \frown A_j=0$ $i \neq j$. Ist $a_i\alpha b_j$, $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ — wenn es existiert — unabhängig von der Wahl der Elemente a_i, a_j in einer selben Klasse A_k enthalten, so kann man die Verknüpfung der Klassen durch $A_i\alpha A_j=A_k$ definieren. Dann bilden die Klassen auch ein algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem V, welches wir ein *Restklassensystem* von $\mathfrak{A}$ nennen.

Zwei algebraische Systeme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ heissen *isomorph*, wenn es eine eineindeutige Zuordnung $a \sim a'$, $a \in \mathfrak{A}$, $a' \in \mathfrak{A}'$, gibt, so daß $(a\alpha b)'=a'\alpha b'$ ist. Wenn die Zuordnung einmehrdeutig ist, so spricht man von dem *Homomorphismus* von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$. Dann erhält man eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}$, wenn man die einem selben Element aus $\mathfrak{A}'$ zugeordneten Elemente in einer Klasse zusammenfasst. Solche Klassen bilden ersichtlich ein zu $\mathfrak{A}'$ isomorphes Restklassensystem von $\mathfrak{A}$. Da umgekehrt jedes Restklassensystem eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph ist, so kann man den Homomorphismus auch folgendermassen definieren. $\mathfrak{A}'$ heisst zu $\mathfrak{A}$ homomorph, wenn $\mathfrak{A}'$ einem Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

Wir betrachten nun eine mehrmehrdeutige Zuordnung $a \sim a'$. Wenn aus $a \sim a'$, $b \sim b'$ stets $a\alpha b \sim a'\alpha b'$ folgt, so heisst die Zuordnung ein *Meromorphismus.* Wenn insbesondere aus $a \sim a'$, $b \sim a'$, $b \sim b'$, $c \sim b'$ stets $a \sim b'$, $c \sim a'$ folgt, so heisst der Meromorphismus ein Klassenmeromorphismus. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ nach einer mehrmehrdeutigen Zuordnung klassenmeromorph, so gibt es isomorphe Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, so daß je zwei Elemente a, a' aus den zugeordneten Klassen und nur diese mit einander entsprechen. Die Menge der a entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{A}'$ bezeichnen wir nämlich mit A'_a. Analog bezeichnen wir mit $A_{a'}$ die Menge der a' entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{A}$. Dann bilden die $A_{a'}$ und A'_a nach der Voraussetzung isomorphe Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, die die verlangte Eigenschaft besitzt. Ist umgekehrt eine isomorphe Zuordnung der Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gegeben, so erhält man einen *Klassenmeromorphismus*, wenn man die Elemente der entsprechenden Klassen zuordnet.

1) Abstract algebra bei G. Birkhoff, Lattice theory (1940). Vgl. auch G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935).

§ 2. *Primitive algebraische Systeme.* Von jetzt an beschränken wir uns auf den Fall, daß die Verknüpfung für jedes Paar der Elemente definiert ist. Wenn man einer geordneten Menge $(a_1, a_2 \cdots)$ je ein Element a zuordnet, so heisst a eine (eindeutige) Funktion von $a_1, a_2, \cdots$. Wenn die Funktion durch die vorgegebenen Verknüpfungen darstellbar, z. B. $\big(a_1\alpha_1(a_2\alpha_2a_3)\big)\, \alpha_3a_4$, so heisst sie eine Verknüpfungsfunktion. Jede Gleichung $\varphi(a_1, a_2, \ldots) = \psi\,(a_1, a_2, \ldots)$ mit den Verknüpfungsfunktionen φ, ψ kann man als eine Eigenschaft der Verknüpfungen ansehen, sie heisst eine Verknüpfungsgleichung. Es sei A eine Menge der Verknüpfungsgleichungen. Ein algebraisches System heisst A-algebraisches System, wenn alle Gleichungen aus A bestehen. Nach den verschiedenen A kann man verschiedene Begriffe algebraischer Systeme einführen. Solche algebraische Systeme heissen *primitiv.*

Für die primitiven algebraischen Systeme gilt:

Jedes in einem A-algebraischen System $\mathfrak{A}$ enthaltene algebraische System mit V als Verknüpfungssystem ist stets ein A-algebraisches System. Ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{A}'$ auch ein A-algebraisches System. Denn die Gleichungen $f(a_1, a_2, \ldots) = g\,(a_1, a_2, \ldots)$ aus A müssen für alle $a_1, a_2, \cdots$ gelten.

Verbände, Gruppen, assoziative Ringe, Liesche Ringe sind alles primitiv. Körper sind nicht primitiv, da die Division durch Null unmöglich ist. Integritätsbereiche sind auch nicht primitiv, da der Restklassenring kein Integritätsbereich sein kann.

Eine Verknüpfungsfunktion zweier Elemente heisst Folgeverknüpfung. Besteht V' aus gewissen Folgeverknüpfungen von V, so ist $\mathfrak{A}$ auch ein algebraisches System mit dem Verknüpfungsspstem V'. Es sei ψ eine Funktion, die man aus einer Funktion φ durch endlichmalige Anwendungen der Gleichungen aus A erhält. Dann heisst $\varphi = \psi$ Folgegleichung von A. Die Gesamtheit der Folgegleichungen von A, die durch die Verknüpfungen aus V' darstellbar sind, bestehe aus den Folgegleichungen eines Teils A'. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein A'-algebraisches System mit V'. Besteht V umgekehrt aus den Folgeverknüpfungen von V', so erhält man A', wenn man die Gleichungen aus A durch die Verknüpfungen aus V' darstellt. In diesem Fall ist der Begriff der A-algebraischen Systeme mit dem Verknüpfungssystem V mit dem der A'-algebraischen Systeme mit dem Verknüpfungssystem V' äquivalent. Im allgemeinen kann man aus dem Begriff der A'-algebraischen Systeme durch Spezializierung den Begriff der A-algebraischen Systeme einführen[1].

§ 3. *Freie algebraische Systeme.* Die aus den endlich vielen Elemente einer Menge $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und den Verknüpfungssymbolen aus $V = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ formal gebildeten Ausdrücke bilden ein algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem V, wenn man annimmt, daß zwei verschiedene Ausdrücke verschiedene Elemente bedeuten. Solches alge-

1) z. B. ein assoziativer Ring ist ein Liescher Ring nach der Multiplikation $xy - yx$, die eine Folgeverknüpfung von xy und $x - y$ ist. Eine Gruppe ist eine Halbgruppe nach der Multiplikation, die eine Folgeverknüpfung der Rechtsdivision ist. Vgl. § 5.

braische System heisst ein *durch E erzeugtes absolut freies algebraisches System* mit dem Verknüpfungssystem V, welches mit $0(E)$ bezeichnet wird.

Es sei nun ein System A der Verknüpfungsgleichungen vorgegeben. Ein Element f aus $0(E)$ heisst zu f' kongruent, wenn man f' aus f durch endlichmalige Anwendungen der Gleichungen aus A erhält. Dann erhält man ersichtlich eine Klasseneinteilung von $0(E)$ und man zeigt leicht, daß die Klassen ein A-algebraisches System $A(E)$, welches zu $0(E)$ homomorph ist. Solches A-algebraisches System heisst das *durch E erzeugte freie A-algebraische System.*

Nun sei ein System B der Relationen der Elemente aus E vorgegeben. Dabei versteht man unter einer Relation eine Gleichheit der Ausdrücke aus $0(E)$. Unter Benützung der Gleichungen aus A und B kann man ein Restklassensystem $\mathfrak{B}$ von $A(E)$ konstruieren. Bedeuten die (a_i) die a_i enthaltenden Klassen, so wird $\mathfrak{B}$ durch den (a_i) erzeugt und die (a_i) genügen die Relationen aus B. Das System $\mathfrak{B}$ heisst das *durch E erzeugte freie A-algebraische System mit Relationen B*, es wird mit $A(E, B)$ bezeichnet.

Im allgemeinen sei C ein Untersystem von B. Dann ist $A(E, B)$ zu $A(E, C)$ homomorph. Setzt man umgekehrt in einem Restklassensystem von $A(E, C)$ alle Ausdrücke in einer selben Klasse gleich, so enthält das System B solcher Relationen sicher C und das Restklassensystem ist $A(E, B)$. Als einen speziellen Fall erhält man also: Jedes durch E erzeugte A-algebraische System kann man als ein durch E erzeugtes freies A-algebraisches System mit gewissen Relationen auffassen. Etwas allgemeiner: *Jedes durch E erzeugte A-algebraische System mit Relationen C kann man als ein durch E erzeugtes freies A-algebraisches System auffassen, dessen Relationen B die Relationen C enthält. Also ist solches System zu $A(E, C)$ homomorph.*

Jedes A-algebraische System wird natürlich durch den sämtlichen Elemente erzeugt. Dann ist eine Verknüpfungsgleichung eine zusammenfassende Darstellung der Relationen. *Also erhält man aus einem A-algeraischen System $\mathfrak{B}$ ein zu $\mathfrak{B}$ homomorphes, wenn man gewisse Verknüpfungsgleichungen voraussetzt.* Dies ist eine Methode der Speziallizierung des Begriffs[1].

Der Tietzsche Satz über die freien Gruppen lässt sich ohne Mühe in unseren allgemeinen Fall übertragen. Wir betrachten ein $A(E, B)$. Eine Relation, die durch endlichmalige Anwendungen der Gleichungen aus A und B beweisbar ist, heisst eine Folgerelation. Besteht $B^* \supset B$ aus den Folgerelationen von B, so ist ersichtlich $A(E, B) = A(E, B^*)$. Besteht anderseits $E' \supset E$ aus den Elemente von $0(E)$, so ist $A(E, B) = A(E', B')$, wobei B' aus den Relationen aus B und den Relationen $b = \varphi(E)$ für b aus E' besteht. Wenn $A(E, B)$ schon durch ein Untersystem E_1 von E erzeugt: $E = E_1 + E_2$, so lässt sich jedes Element a aus E_2 in der Form $a = \psi(E_1)$ darstellen. Setzt man in den Relationen B $a = \psi(E_1)$, so erhält man die Relationen B_1 zwischen den Elemente

1) z. B. kommutative Gruppe als spezialle Gruppe; kommutativer Ring als spezialer Ring; Modulärer Verband, Distributiver Verband als spezialler Verband.

aus E_1. Dann ist $A(E, B) = A(E_1, B_1)$. Denn $A(E, B) = A(E, B')$, $B' = \{a = \psi(E_1), B\} = \{a = \psi(E_1), B_1\}$, also ist nach oben $A(E, B) = A(E_1, B_1)$. Der Satz von Tietz lautet: *Dann und nur dann ist* $A(E, B) = A(E', B')$, *wenn man aus* (E, B) *durch oben genannte Umformungen* (E', B') *erhält.* Es sei nämlich $A(E, B) = A(E \cup E', B^*)$, $A(E', B') = A(E \cup E', B^{**})$. Ist $A(E, B) = A(E' B')$, so ist es gleich $A(E \cup E', B^* \cup B^{**})$. Also kann man aus (E, B) durch Umformungen (E', B') erhält, wie folgt: $(E, B) \to (E \cup E', B^*) \to (E \cup E', B^* \cup B^{**}) \to (E \cup E', B^{**}) \to (E', B')$. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 4. *Freies Produkt, Einbettung und Erweiterung.* Der Begriff der freien algebraischen Systeme lässt sich, wie in der Gruppentheorie, folgendermassen verallgemeinern. Nun seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots$ algebraische Systeme mit den Verknüpfungssysteme $V_1, V_2, \ldots$. V sei ein alle V_i umfassendes System. Man bilde zunächst das absolut freie algebraische System, das durch allen Elemente aus $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots$ erzeugt wird. Als Relationen B nehmen wir alle Gleichungen, die in A_i bestehen, $i = 1, 2, \ldots$. Das freie algebraische System mit Relationen B heisst *absolut freies Produkt* von den $\mathfrak{A}$ bezüglich V. Wenn man die Verknüpfungsgleichungen A voraussetzt, so erhält man daraus ein A-algebraisches System, das *A-freie Produkt.* In der Literatur ist üblich der Fall, daß $V = V_1 = V_2 = \cdots$ und alle $\mathfrak{A}_i$ A-algebraische Systeme mit einem selben A sind. Besteht $\mathfrak{A}_i$ nur aus einem einzigen Element a_i, so ist das absolut freie Produkt nichts anderes als das durch den a_i erzeugte absolut freie algebraische System.

Ein A'-algebraisches System $\mathfrak{A}'$ mit den Verknüpfungen V' heisst in einem A-algebraischen System $\mathfrak{A}$ mit den Verknüpfungen V *eingebettet,* wenn es Folgeverknüpfungen V'' von V gibt, so daß $\mathfrak{A}$ als ein algebraisches System mit den Verknüpfungen V'' ein zu $\mathfrak{A}'$ isomorphes Untersystem besitzt. Ist $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$ eingebettet, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit V'' mit V' identifizieren, wir nehmen an, daß $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Dann muss $\mathfrak{A}'$ natürlich im durch den sämtlichen Elemente aus $\mathfrak{A}'$ erzeugten Untersystem $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{A}$ enthalten. $\mathfrak{A}^*$ ist aber zum freien A-algebraischen System $A(\mathfrak{A}')$ homomorph. Es sei $a\beta b = \varphi(a, b)$ für jede Verknüpfung β aus V', wo φ Verknüpfungsfunktion bezüglich V ist. Ist $a\beta b = c$, $a, b \in \mathfrak{A}'$, so ist $\varphi(a, b) = c$. Durch diese Relationen erhält man umgekehrt aus $A(\mathfrak{A}')$ ein A-algebraisches System $\bar{\mathfrak{A}}$, das $\mathfrak{A}'$ enthält, da $\mathfrak{A}^*$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph ist. *Daher betrachten wir zunächst* $A(\mathfrak{A}')$ *bezüglich* V *und wir setzen die Gleichungen* $a\beta b = \varphi(a, b)$ *fest. Dann und nur dann ist* $\mathfrak{A}'$ *in einem* A*-algebraischen System einbettbar, wenn je zwei Elemente aus* $\mathfrak{A}'$ *nach der Hinzufügung der Relationen* $\varphi(a, b) = c$ *inkongruent bleibt, wobei* $a\beta b = c$ *ist*[1].

Ist ein A-algebraisches System $\mathfrak{A}'$ in einem A-algebraischen System $\mathfrak{A}$ eingebettet, so heisst $\mathfrak{A}$ eine *Erweiterung* von $\mathfrak{A}'$. Wir werden nun

1) z. B. die Einbettung eines Lieschen Ringes in einem assoziativen Ring. Vgl. E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, J. reine und angew. Math. **177** (1937); G. Birkhoff, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, Ann. Math. **38** (1937).

eine allgemeine Methode angeben beliebige Erweiterung zu konstruieren. Man bilde zunächst das A-freie Produkt von $\mathfrak{A}'$ mit einer beliebigen Menge ohne Verknüpfung. Natürlich ist jede Erweiterung einem solchen A-freien Produkt homomorph, also ist sie aus dem A-freien Produkt durch Hinzufügung der gewissen Relationen erhältlich. Dabei müssen aber je zwei Elemente aus $\mathfrak{A}'$ nach der Hinzufügung der Relationen noch inkongurent bleiben[1].

§ 5. *Bemerkungen über die Gruppentheorie.* Ein A-algebraisches System mit drei Verknüpfungen $\cdot$, $\backslash$, $/$, (Multiplikation, Linksdivision, Rechtsdivision) heisst eine Gruppe, falls A aus den Gleichungen $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, $(a/b)\cdot b=a$, $a\backslash(a\backslash b)=b$ besteht. $a/a=b/b$, $a/a=a\backslash a$ sind die Folgegleichungen, die die Existenz des eindeutigen Einselements bedeuten. $b\backslash(b\backslash b)=(b/b)/b$ ist das reziproke Element b^{-1} von b. Man beweist aber leicht, daß $\cdot$ und $\backslash$ Folgeverknüpfungen von $/$ sind. Es ist in der Tat $a\cdot b=a/\big((b/b)/b\big)$, $a\backslash b=\big((a/a)/a\big)/\big((b/b)/b\big)$. Damit ist gezeigt, daß *Gruppen primitive algebraische Systeme sind, wenn man Rechts (Links) division als Verknüpfung annimmt.*

Wenn man eine Gruppe als ein primitives algebraisches System bezüglich der Multiplikation annimmt, so erhält man den Begriff der Halbgruppen. Vgl. § 2. Wenn man in einer Gruppe die Kommutativität voraussetzt, so erhält man die abelsche Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe. Vgl. § 3.

Aus dem Isomorphismus bzw. dem Homomorphismus bezüglich der Multiplikation folgt bekanntlich der Isomorphismus bzw. der Homomorphismus bezüglich der Division. Aus dem Meromorphismus bezüglich der Multiplikation folgt aber kein Meromorphismus bezüglich der Division. Also muss man den Meromorphismus der Gruppen durch Rechtsdivision definieren. Man beweist leicht: *Der Meromorphismus der Gruppen ist stets ein Klassenmeromorphismus.* Es sei nämlich, wie bei § 1, $a\sim a'$, $b\sim a'$, $b\sim b'$, $c\sim b'$. Dann ist $a=a\cdot(b^{-1}b)\sim a'a'^{-1}b'=b'$, $a'=a'(b'^{-1}b')\sim bb^{-1}c=c$. Da jedes Restklassensystem einer Gruppe stets eine Faktorgruppe nach dem Normalteiler, so erhält man unmittelbar den bekannten Satz über den Meromorphismus[2].

---

1) z. B. Polynombereich über einem Ring, Gruppenerweiterung.

2) Vgl. eine andere Definition des Gruppenmeromorphismus bei Wedderburn: Homomorphism of groups, Ann. Math. **42** (1941).