65. *Sur le problème de M. Kunugui.*

Par Yosiro TUMURA.
Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

1. Récemment, la théorie des fonctions uniformes et méromorphes dans le domaine arbitraire est étudiée par plusieurs auteurs, en particulier par MM. K. Kunugui[1] et K. Nosiro[2]. Soit Δ les domaines, dont la frontière contient le point à l'infini, et supposons que la frontière γ de Δ à distance fini consiste de l'infinité dénomblable des courbes analytiques. Soit, encore, $w=f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans Δ et sur γ, telle que $f(z)$ prend dans Δ les valeurs du domaine W_0 de w-plan dont la frontière consiste de q' courbes fermés $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q'}$, et sur γ les valeurs de Γ_μ. Si l'on considère la partie commune à Δ et à $|z|>r_0$, pour assez grand r_0, sous ces hypothèses, on peut étudier l'ensemble d'accumulation (cluster set)[3].

Soient $\Delta(r)$ les parties communes à Δ et au cercle $|z|<r$, $\Theta(r)$ arcs de $|z|=r$ dans Δ, et γ_μ la courbe frontière dont w-image recouvre Γ_μ. Désignons par $n(r, \Gamma_\mu)$ le nombre des courbes γ_μ fermées dans le cercle $|z|<r$, qui recouvrent d'entière fois. Désignons encore par $A(r)$ l'aire riemannienne de l'image $F(r)$ de $\Delta(r)$, la proportion de $A(r)$ avec l'aire de W_0 par $S(r)$, et la longueur totale de l'image de $\Theta(r)$ par $L(r)$. (Dans le cas où W_0 n'est pas borné, on emploie la métrique sphérique.)

Si a appartient à W_0, on écrit

$$T_f(r, \Delta; a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}d\varphi+N(r, \Delta; a),$$

où $n(r, \Delta; a)$ est le nombre de racines de l'équation $f(z)-a=0$ dans $\Delta(r)$, compté suivant leurs multiplicités, et $N(r, \Delta; a)$ son intétrale logarithmique. Si l'on prend un domaine autre W_1, contenant $w=a$ à son intérieur et contenu dans W_0, M. Kunugui a indiqué que

$$T_f(r, \Delta; a)-T_f(r, \Delta_1; a)=0(1), \tag{1}$$

où Δ_1 est le domaine du z-plan correspondant à W_1, et a prédit, mai de cette année, que $T_f(r, \Delta; a)$ soit invariant sauf le terme trivial quand a parcourt dans W_0. C'est le *problème* de M. Kunugui.

En employant la théorie de la surface de recouvrement de M. Ahlfors[4], on peut prouver les théorèmes suivants[5].

1) K. Kunugui: a) Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling, Ce Proc. **15** (1939). b) Sur un Problème de M. Beurling, Ibid., **16** (1940).

2) K. Nosiro: a) On the theory of cluster sets of anal. functions, Jour. Fac. Sc. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I, vol. **6** (1938). b) On the singularities of anal. func., Jap., Jour. Math., **17** (1940).

3) Voir p. ex. loc. cit. 1b) et 2b).

4) L. Ahlfors, Zur Theories der Überlagerungsfläche, Acta Math., **65** (1935).

5) Je prouverai quelques résultats de cette Note dans "Quelques applications de la théorie de M. Ahlfors," Jap. Jour. Math.

Soient D_ν q domainis intérieurs à W_0 et extérieurs les uns aux autres. Si w-image F de $\varDelta$ est régulièrement exhaustible, c'est-à-dire $\lim_{r\to\infty} A(r)=\infty$, *on a*

$$(2)\qquad \sum_1^q n(r, D_\nu)-\sum_1^q n_1(r, D_\nu)+\sum_1^{q'} n(r, \Gamma_\mu) > (q+q'-2)S(r)-hL(r)$$

et

$$n(r, \Gamma_\mu) < S(r)+hL(r) \qquad (\mu=1, \ldots, q')$$

$$(q'-2)\,S(r)-hL(r) < \sum n(r, \Gamma_\mu) < q'S(r)+hL(r)\,,$$

où h est un constant ne dépendant que la figure. Écrivons le défaut

$$\delta(\Gamma_\mu)=1-\overline{\lim}\,\frac{n(r, \Gamma_\mu)}{S(r)}\,.$$

Alors on a

$$\sum \delta(D_\nu)+\sum \vartheta(D_\nu)+\sum \delta(\Gamma_\mu) \leqq 2\,.$$

Et si la surface de Riemann F ramifie sur D_ν μ_ν-plement au moins et l'image de γ recouvre Γ_j, μ_j fois au moins, on a

$$(3)\qquad \sum_1^q\left(1-\frac{1}{\mu_\nu}\right)+\sum_1^{q'}\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)\leqq 2\,.$$

C'est le précisé du théorème de MM. Nosiro-Kunugui[1]. Comme le corollaire, on a, de (3): *Si W_0 est entouré par trois frontières au moins, la frontière γ dans z-plan contient une infinité des courbes bornées et fermées. Si W_0 est entouré par cinq frontière au moins, γ contient une infinité des courbes bornées et fermées qui recouvre Γ_μ seulement une fois.*

2. Si l'on applique la formule de Gauss à $\log|f(z)|$ dans le domaine $\varDelta(r)$ excepté les petits cercles C_i autour de 0- et ∞-points de $f(z)$, on a

$$(4)\qquad \int_{\gamma(r)}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,ds+r\frac{d}{dr}\int_{\Theta(r)}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$
$$+\sum_i\int_{C_i}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,ds=0\,.$$

Supposons que W_0 contient $w=0$ dans son intérieur, et que $f(z)\neq 0$. Soit W_1 le domaine borné et étoilé par rapport à $w=0$, qui est contenu complètement dans W_0. Alors de (4), on a, désignant par $\varDelta_1$ et $\gamma^{(1)}$ le domaine et sa frontière correspondants dans z-plan,

$$(5)\qquad \int_{\gamma^{(1)}(r)} d\arg f(z)+r\frac{d}{dr}\Big\{m(r, \varDelta_1;\infty)-m(r, \varDelta_1; 0)\Big\}$$
$$-2\pi n(r, \varDelta_1; 0)=0\,.$$

Si l'on désigne par $\varphi_1(r)$ la variation totale de $\arg f(z)$ sur $\gamma^{(1)}(r)$, on a de (1) et (5)

1) loc. cit. 1b) p. 362, et 2b) p. 95.

$$T_f(r, \Delta; 0) = \Phi_1(r) + \log \frac{1}{|f(0)|} + m(r, \Delta_1; \infty) + 0(1),$$

où $\Phi_1(r)$ est l'intégrale logaritamique de $\varphi_1(r)$, et si $z=0$ n'appartient pas à Δ_1, on pose $\log \frac{1}{|f(0)|}=0$. Car W_1 est borné et étoilé, $m(r, \Delta_1; \infty)$ est borné et $\varphi_1(r)$ est une fonction croissante de r. En particulier on a:

Si W_0 contient le cercle: $|w|<1$, on a

$$T_f(r, \Delta; 0) = \Phi_1(r) + \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(0)|}. \tag{6}$$

$T_f(r, \Delta; 0)$ est une fonction convexe de $\log r$. Il est évident que (6) *est la formule de M. Cartan:*

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \Delta; e^{i\theta})\, d\theta.$$

Donc, (6) *est une autre interprétation de la formule de M. Cartan.* Au cas des fonctions méromorphes dans le cercle $|z|<R(\leqq\infty)$, on peut la prouver de même manière.

Problème. D'évaluer la quantité

$$\int_{\gamma(r)} \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z)|\, ds, \tag{7}$$

dans le cas où les points $w=0$ et $w=\infty$ appartiennent à W_0 tous les deux.

3. Pour deux valeurs appartenant à W_0, K. Kunugui[1] a prouvé que

$$T_f(r, \Delta; a) \quad \text{et} \quad T_f(r, \Delta; b),$$

ont le même ordre de grandeur. Suivant lui, lions $w=a$ à $w=b$ par une courbe C dans W_0. Soit ρ la distance entre Γ et C. Prenons $n-1$ points w_i ($w_0=a$ et $w_n=b$) sur C, tels que $|w_i-w_{i+1}|<\frac{\rho}{2}$. Désignons par W_i le cercle $|w-w_i|<\rho$ qui est intérieur dans W_0, et par Δ_i le domaine correspondant à W_i.

Si l'on applique (6) aux fonctions $f(z)-w_i$ et $f(z)-w_{i+1}$ dans Δ_i, on a

$$T_f(r, \Delta_i; w_i) = \Phi_i(r) + 0(1), \quad T_f(r, \Delta_i; w_{i+1}) = \Psi_i(r) + 0(1),$$

où $\varphi_i(r)$ et $\psi_i(r)$ sont les variations totales de $\arg(f-w_i)$ et $\arg(f-w_{i+1})$ sur $\gamma^{(1)}(r)$, Φ_i et Ψ_i sont leurs intégrales logarithmiques. Car $|w_i-w_{i+1}|$ est inférieur à la moitié du rayon de W_i, on a aisément

$$\frac{2}{3} < \frac{\varphi_i(r)}{\psi_i(r)} < 2.$$

Donc

$$T_f(r, \Delta_i; w_{i+1}) < \frac{3}{2} T_f(r, \Delta_i; w_i),$$

1) Son œuvre paraîtra dans ce Proc. en même temps.

et inversement. Par conséquent, on a, de (1)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{T_f(r, \varDelta; a)+0(1)}{T_f(r, \varDelta; b)+0(1)} < \left(\frac{3}{2}\right)^n .$$

Pour le prouver, on peut remplacer le cercle par le domaine étoilé par rapport à w_i et contenant w_{i+1}.

4. Mais on peut prouver le proposition plus précise que numéro précédent.

Supposons, d'abord, que W_0 est borné et contient le cercle C_a: $|w-a|<\rho$ dans son intérieur. De la formule de M. Cartan, on a

$$\frac{d}{d\log r} T_f(r, \varDelta; a) = \frac{1}{2\rho\pi}\int_0^{2\pi} n(r, \varDelta; a+\rho e^{i\theta})\rho d\theta , \tag{8}$$

l'intégrale de dernière membre est la longueur totale des arcs de C_a recouverts par $F(r)$. Donc la quantité (8) est le nombre moyen $S(r, C_a)$ de recouvrement sur le cercle C_a par l'image $F(r)$ de $\varDelta(r)$. Désignons par $S_e(r)$ l'aire riemannienne de $F(r)$ divisée par l'aire W_0. Par "Überdeckungssatz" de M. Ahlfors, on a

$$|S_e(r)-S(r, C_a)| < hL_e(r) ,$$

où h est un constant ne dépendant que la figure. Si

$$\lim S_e(r) = \infty ,$$

par l'intégration logarithmique suivant M. Dinghas[1], on a

$$|T_f^{(e)}(r, \varDelta) - T_f(r, \varDelta; a)| < \Omega(r) , \tag{9'}$$

et si a et b sont des points de W_0,

$$|T_f(r, \varDelta; a) - T_f(r, \varDelta; b)| < \Omega(r) \tag{10'}$$

où

$$T_f^{(e)}(r, \varDelta) = \int_0^r \frac{S_e(t)}{t} dt ,$$

et sauf l'ensemble de r où la variation de $\log\log r$ est bornée

$$\Omega(r) = \text{const.} \int \frac{L_e(t)}{t} dt < \text{const.} \sqrt{T} \log T .$$

Résultats obtenus sont valable quand W_0 contient le point $w=\infty$ et quand on emploie la métrique sphérique.

Soient a une valeur arbitraire finie de W_0, et W_1 un domaine borné contenant $w=a$ à son intérieur et contenu dans W_0. Soient encore $S(r)$ la quantité analogue au-dessus de W_0 mesurée par la métrique sphérique, et

$$T_f(r, \varDelta) = \int_0^r \frac{S(t)}{t} dt .$$

1) Dinghas, Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen, M. Z., **44** (1939).

Cas où W_0 contient $w=0$. De (10′) et la formule de M. Cartan, on a

$$|T_f(r, \Delta)-T_f(r, \Delta; 0)|<\Omega(r)$$

et

$$|T_f(r, \Delta; 0)-T_f(r, \Delta; a)|<\Omega(r).$$

Donc,

$$|T_f(r, \Delta)-T_f(r, \Delta; a)|<\Omega(r).$$

Ce se prouvera, de la même manière, dans le cas où W_0 contient $w=\infty$.

Cas où W_0 ne contient ni $w=0$, ni $w=\infty$. On transforme W_0 par la rotation de la sphère de Riemann, tel que $w=a$ est transformé à l'infini, c'est-à-dire:

$$g(z)=\frac{1+\bar{a}f}{f-a}.$$

Alors,

$$T_f(r, \Delta)\equiv T_g(r, \Delta)$$

$$T_f(r, \Delta; a)-T_g(r, \Delta; \infty)=0(1),$$

et de l'inégalité au-dessus, on a

$$|T_g(r, \Delta)-T_g(r, \Delta; \infty)|<\Omega(r).$$

Par conséquent, on a:

Sous les hypothèses du noméro 1 *et* $\lim A(r)=\infty$, *on a, pour toutes les valeurs a de* W_0, *l'inégalité*

$$(9)\qquad |T_f(r, \Delta)-T_f(r, \Delta; a)|<\Omega(r),$$

où $\Omega(r)$ *satisfait, sauf au plus l'ensemble de r surlequel la variation totale de log log r est bornée, à l'inégalité:*

$$(10)\qquad \Omega(r)<\text{const.}\sqrt{T_f(r, \Delta)}\log T_f(r, \Delta).$$

En outre, $T_f(r, \Delta)$ *ne diffère que la quantité* $0\big(\Omega(r)\big)$ *pour la transformation linéaire de* $f(z)$.

Définissons que $T_f(r, \Delta)$ est une *fonction caractéristique* de $f(z)$ dans Δ.

Si le problème du n° 2 est résolu, on peut prouver la proposition de ce numéro directement, c'est-à-dire sans l'usage de la théorie de M. Ahlfors. En particulier, nous pouvons prouver:

Supposons que le, nombre des courbes frontières $\gamma(r)$ qui sont "Querschnitt" du cercle $|z|<r$, c'est-à-dire qui aboutissent à $|z|=r$, est borné, ne dépendant pas de r. Alors, on a

$$T_f(r, \Delta; a)-T_f(r, \Delta; b)=0\,(\log r),$$

a et b étant deux point de W_0.

5. *Si, étant donné M arbitrairement grand et* $\varepsilon>0$ *arbitrairement petit, pour tous les points a du domaine partiel* W_1 *de* W_0, *il existe un point* $z(a)$ *au moins dans* Δ, *tel que*

$$|z(a)|>M \quad \text{et} \quad \big|f\big(z(a)\big)-a\big|<\varepsilon,$$

alors on a[1]

$$\lim A(r) = \infty .$$

Donc, les résultats des n° 1 et 4 se prouvent sous cette hypothèse. Dans le cas de l'ensemble d'accumulation, W_1 est identique à W_0.

Il est évident dans le cas où Δ contient une infinité d'îles, car l'aire de l'image d'une île est au moins égale à celle de W_0. Donc on peut supposer que Δ consiste des langues, et que W_1 a la distance positive de la frontière de W_0. En employant l'inégalité de M. Schwarz, on a

$$[\Omega(r)]^2 = \text{const.} \int_0^r \frac{[L(t)]^2}{t} dt \int_0^r \frac{dt}{t} < \text{const.}\ A(r) \log r .$$

Donc, si l'équation $f(\Delta) - a = 0$ possède une infinité de racines dans Δ, on a $\lim A(r) = \infty$. Car, si $A(r)$ est borné $T_f(r, \Delta) < K \log r$, donc on a

$$\lim \frac{T_f(r, \Delta; a)}{\log r} = \infty$$

et de (10′)

$$T_f(r, \Delta; a) < T_f(r, \Delta) + \Omega(r) < K \log r + \text{const.} \sqrt{\log r} ,$$

c'est une contradiction.

Si $f(z) - a = 0$ ne possède que le nombre fini de racines, M. Nosiro[2] a démontré qu'il existe le chemin asymptotique dans Δ sur lequel $f(z)$ tend vers a. Donc, l'on peut prouver que $\lim A(r) = \infty$, suivant M. Nosiro[1].

6. On n'étudie dans la théorie de l'ensemble d'accumulation (cluster set) qu'une fonction uniforme. Mais on peut étendre le théorème de MM. Beurling-Kunugui[3] aux fonctions multiformes au cas simple.

Soient D un domaine arbitraire univalent (schlicht), C sa frontière, et $f(z)$ une fonction algébroïde méromorphe dans D, z_0 un point de la frontière non isolé. Définissons $S_{z_0}^{(D)}$ et $S_{z_0}^{(C)}$ de même manière qu'une fonction uniforme. La frontière de $S_{z_0}^{(D)}$ est contenue dans celle de $S_{z_0}^{(C)}$:

$$B(S_{z_0}^{(D)}) \subset B(S_{z_0}^{(C)}) .$$

Il faut que $f(z)$ possède k déterminations à tous les points de D. Donc, $f(z)$ est définie par l'équation

$$f^k + A_1(z) f^{k-1} + \cdots A_k(z) = 0 ,$$

où $A_i(z)$ sont des fonctions uniformes et méromorphes dans D. Posons

$$A^*(z) = \operatorname*{Max}_{i=1,\dots,k} |A_i(z)|^{\frac{1}{i}}$$

et

$$F^*(z) = \operatorname*{Max}_{i} |f_i(z)| ,$$

1) Voir loc. cit. 2b) p. 90. Mais il suppose qu'il y a, dans Δ, de chemin asymptotique.

2) loc. cit. 2a) p. 218 et b) p. 79.

3) loc. cit. 1a) et 2b) p. 81.

où $f_i(z)$ désigne k déterminations de $f(z)$. La proposition sera prouvé, en employant le théorème de MM. Beurling-Kunugui pour la fonction uniforme sous la forme suivante

$$\overline{\lim_{z\to z_0}}\,|f(z)|=\overline{\lim_{z'\to z_0}}\,\Big(\overline{\lim_{z\to z'}}\,|f(z)|\Big)$$

et l'inégalité suivante de M. Valiron[1]:

$$K'A^*(z)<F^*(z)<KA^*(z)\,,$$

où K et K' est constants ne dépendant que k.

1) Je ne sais où cette inégalité était prouvée, mais on peut la prouver aisément. Par ex., Y. Tumura, Fonctions algébroïdes (en japonais), Kaisi de Phys.-Math. Soc. Jap., 1941.