PAPERS COMMUNICATED

64. Une généralisation des théorèmes de MM. Picard-Nevanlinna sur les fonctions méromorphes.

Par Kinjiro KUNUGUI.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

§ 1. Introduction. L'allure d'une fonction méromorphe et uniforme dans un voisinage d'un point singulier essentiel et isolé a été l'objet des recherches de plusieurs auteurs. Le but de cette Note est de généraliser des théorèmes dûs à M. R. Nevanlinna[1] sur la distribution des valeurs. *La généralisation sera donnée concernant les domaines de définition des fonctions méromorphes.* Soient D un domaine quelconque (d'ordre de connexion finie ou infinie) situé dans le plan complexe z et z_0 un des points non isolés de sa frontière Γ. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que $z_0=\infty$. Soit $w=f(z)$ une fonction méromorphe et uniforme dans D. Introduisons d'abord avec M. W. Gross[2], les notions des *ensembles de valeurs d'agglomération.*

Pour cela, désignons par K_n l'extérieur du cercle $|z|\leq n$, et par A_n l'ensemble de toutes les valeurs prises par $f(z)$ pour z appartenant à la partie commune à D et à K_n. Posons $R_{z_0}^{(D)}=\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ et $S_{z_0}^{(D)}=\prod_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n$, où $\bar{A}_n$ désigne la fermeture de A_n (la métrique étant considérée toujours sur la sphère de Riemann au rayon $1/2$ et tangente à l'origine du plan w. Désignons, d'autre part, par B_n la somme des ensembles $S_{z'}^{(D)}$, la sommation s'étendant à tous les points frontières z' satisfaisant à l'inégalité: $n<|z'|<\infty$. Posons enfin, $S_{z_0}^{(\Gamma)}=\prod_{n=1}^{\infty}\bar{B}_n$. $S_{z_0}^{(D)}$ et $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ s'appellent deux ensembles de valeurs d'agglomération. Ils sont des ensemble fermés et satisfont toujours à l'inclusion: $S_{z_0}^{(D)}\geq S_{z_0}^{(\Gamma)}$. Or, nous avons démontré que $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est un ensemble ouvert[3] et par suite se décompose en un nombre fini ou une infinité dénombrable des composants connexes: $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n$.

§ 2. Fonctions caractéristiques. Soient, maintenant, w_0 un point appartenant à un composant Ω_n et Δ un domaine quelconque contenant dans son intérieur le point w_0, contenu dans Ω_n et entouré par un nombre fini des courbes analytiques, situées complètement dans l'intérieur de Ω_n. D'ailleurs, nous supposons que, dans le cas où $w_0\neq\infty$, Δ ne contient pas le point ∞, et dans le cas où $w_0=\infty$, Δ ne contient pas le point 0.

---

1) Voir p. ex. R. Nevanlinna: Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. **46** (1925); Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929; Eindeutige analytische Funktionen, Berlin, 1936.

2) W. Gross: Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen, Math. Zeitschrift. Bd. **2** (1918), pp. 242-294.

3) K. Kunugui: Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling, Proc. **15** (1939), 27-32.

Il existe alors un nombre ρ_0 $(0 \leq \rho_0)$, tel que l'extérieur K_{ρ_0} du cercle: $|w| \leq \rho_0$ satisfait à la condition: pour tout point frontière z' de K_{ρ_0}, l'ensemble $S^{(D)}_{z'}$ est disjoint de la fermeture $\bar{\Delta}$ de Δ. Désignons par $D_{\rho_0}(r)$ $(\rho_0 < r < +\infty)$ la partie commune au domaine D et à l'intérieur du cercle $|z| < r$ ainsi qu'à l'extérieur de $|z| \leq \rho_0$. Désignons encore par $n(r, w_0, \rho_0)$ le nombre des zéros de l'équation: $f(z) - w_0 = 0$ (ou des pôles de $f(z)$ dans le cas où $w_0 = \infty$) situés dans $D_{\rho_0}(r)$, chaque zéro (ou pôle) étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité, et posons

$$N(r, w_0, \rho_0) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{n(r, w_0, \rho_0)}{r} dr \quad \text{si} \quad \rho_0 > 0\,,$$

$$= \int_{\rho_0}^{r} \frac{n(r, w_0, 0)}{r} dr + n(0, w_0) \log r \quad \text{si} \quad \rho_0 > 0\,,$$

où l'on pose $n(0, w_0) = \lim_{r \to 0} n(r, w_0, 0)$.

D'autre part, soit $\theta(r)$ l'ensemble de tous les arcs de z tels que $z \in D$, $|z| = r$, $f(z) \in \Delta$ $(\rho_0 < r < +\infty)$. Posons de plus

$$m(r, w_0, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta(r)} \log \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - w_0|} d\varphi \quad \text{pour le cas où } w_0 \neq \infty,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta(r)} \log |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi \quad \text{pour le cas où } w_0 = \infty.$$

$$T(r, w_0, \Delta, \rho_0) = m(r, w_0, \Delta) + N(r, w_0, \rho_0)\,.$$

$T(r, w_0, \Delta, \rho_0)$ s'appelle la *fonction caractéristique* de $f(z)$ pour la valeur w_0 et le domaine Δ. Si l'on pose

$$\lambda(w_0) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, w_0, \Delta, \rho_0)}{\log r}$$

$\lambda(w_0)$ ne dépend ni du domaine Δ ni de ρ_0. Nous appelons $\lambda(w_0)$ l'*ordre* de la fonction $f(z)$ pour la valeur w_0.

§ 3. Premier théorème fondamental. Soit w_0 et w_1 deux valeurs appartenant au même composant Ω_n. Nous avons alors toujours $\lambda(w_0) = \lambda(w_1)$. *L'ordre $\lambda(w_0)$ de la fonction $w = f(z)$ pour la valeur w_0 ne dépend de la valeur w_0 que par l'intermédiare des composants de l'ensemble $S^{(D)}_{z_0} - S^{(\Gamma)}_{z_0}$.*

Nous disons qu'une fonction $w = f(z)$ méromorphe et uniforme dans D et d'ordre fini λ $(\lambda > 0)$ pour une valeur w_0 d'un composant Ω_n de $S^{(D)}_{z_0} - S^{(\Gamma)}_{z_0}$, est du type maximum, moyen ou minimum, suivant que

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, w_0, \Delta, \rho_0)}{r^{\lambda}}$$

est égal à l'infini, un nombre positif fini ou zéro. Et, si elle est du type minimum, nous la classifions en deux classes: elle appartient à la classe de convergence ou à la classe de divergence suivant que l'intégrale

$$\int_{\rho_0+1}^{\infty} \frac{T(r, w_0, \Delta, \rho_0)}{r^{\lambda+1}} dr$$

est convergente ou divergente. Or, ces classifications ne dépendent ni de ρ_0, Δ, ni du nombre w_0 à moins qu'il appartienne au même composant Ω_n.

Mais, d'autre part, il est facile de donner des exemples des fonctions holomorphes et uniformes dans D, pour lesquelles $\lambda(w_0)$ et $\lambda(w_1)$ sont différents dès que w_0 et w_1 appartiennent aux composants différents.

§ 4. Le module maximum d'une fonction holomorphe et uniforme définie dans un domaine. Pour une fonction holomorphe et uniforme dans un domaine D, dont $z_0=\infty$ est un point frontière, nous posons $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Lorsque la valeur $w=\infty$ appartient à l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$, nous pouvons comparer $\log^+ M(r)$ avec la fonction caractéristique $T(r, \infty, \Delta, \rho_0)$, où Δ, ρ_0 ont les significations que nous avons précisées plus haut. En effet, en désignant par r un nombre positif quelconque supérieur à ρ_0, et en supposant, sans restreindre la généralité, que le domaine Δ est situé dans l'extérieur d'un cercle: $|w|>R>1$, et que $\log M(r)>\log R$, nous avons l'inégalité:

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \leq \frac{\log T(2r, \infty, \Delta, \rho_0)}{\log 2r}\left(1+\frac{\log 2}{\log r}\right).$$

Donc, pour les fonctions holomorphes jouissant de la propriété: l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$ contient la valeur $w=\infty$, nous avons

$$\lambda(\infty)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

§ 5. Second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna. Le grand théorème de M. Picard montre que pour une fonction méromorphe $f(z)$ qui admet $z=\infty$ comme point singulier essentiel, l'équation: $f(z)-a=0$ a une suite infinie des racines tendant vers l'infini, pour toute valeur a sauf au plus deux. La fonctions caractéristique T et la fonction N introduites par M. R. Nevanlinna[1] nous permet d'exprimer le théorème de M. Picard sous une forme quantitative—dont l'origine remonte à M. E. Borel. Pour cela, M. R. Nevanlinna a établi d'abord le deuxième théorème fondamental:

Soient $f(z)$ une fonction méromorphe, $T(r)$ sa fonction caractéristique et $z_1, z_2, \dots, z_q$ $(q\geq 3)$ des nombres complexes quelconques, finis ou non, qui sont différents entre eux. Dans ces hypothèse, nous avons

$$(q-2)\,T(r)<\sum_{\nu=1}^{q} N(r, z_\nu)-N_1(r)+S(r)$$

où

$$N_1(r)=\int_0^r \frac{n_1(t)-n_1(0)}{t}dt+n_1(0)\log r$$

($n_1(r)$ désignant le nombre des points multiples de $f(z)$ compris dans le

1) Cf. les trois ouvrages de M. R. Nevanlinna, loc. cit. (1).

cercle $|z|\leq r$, chaque point étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité diminué par l'unité), et où l'expression S satisfait à la condition suivante: on a

$$S(r) < O\{\log T(r)+\log r\}\ ,$$

en excluant peut-être une suite d'intervalles (qui ne dépendent pas des nombres $z_1, z_2, \dots, z_q$) dont la longueur totale est finie.

M. R. Nevanlinna a introduit ensuite les notions du défaut $\delta(z)$ et l'indice de ramification $\vartheta(z)$:

$$\delta(z)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,z)}{T(r)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,z)}{T(r)}\ ;\quad \vartheta(z)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_1(r,z)}{T(r)}\ .$$

D'après le deuxième théorème fondamental, nous avons alors

$$\sum_{i=1}^{q}\delta(z_i)+\sum_{i=1}^{q}\vartheta(z_i)\leq 2\ ,$$

qui généralise évidemment le théorème de M. Picard.

M. L. Ahlfors[1)] a donné une forme géométrique de la théorie. M. L. Ahlfors a introduit la notion du nombre moyen des feuillets d'une surface de Riemann. Nous appelons surface finie toute surface W muni d'une suite des triangulations finies, devenant aussi fines que l'on veut. Tous les couples des points de W ont leurs distances de sorte que tous les côtés des triangles soient des courbes rectifiables, et tous les triangles ont les aires. Étant données deux surfaces finies W_0 et W, W sera dite placée sur W_0, lorsqu'à tout point p de W, correspond un point p_0 de W_0, dit *trace* de p_0. La longueur et l'aire d'une figure Y contenue dans W sont la longueur et l'aire d'une figure formée par toutes les traces des points de Y, comptées autant de fois égales à leure multiplicité. Le rapport de l'aire de W avec celle de W_0 (mesurées sur la sphère de Riemann au rayon $1/2$ et tangente à l'origine) s'appelle le nombre moyen des feuillets de W par rapport à W_0. En supposant que la surface W_0 satisfait à quelques conditions auxiliaires, M. L. Ahlfors a démontré un théorème fondamental qui nous donne une relation entre la caractéristique de W_0 et ceux des W.

Prenons comme W_0, la sphère de Riemann au rayon $1/2$ et tangente à l'origine. Soir r un nombre positif. Pour une fonction méromorphe, considérons la surface de Riemann $W(r)$ placée sur W_0, et consitituée par les valeurs de $f(z)$ prises pour les variables z appartenant au cercle $|z|<r$. La surface $W(r)$ est simplement connexe. Soient, maintenant, q $(q\geq 2)$ petits domaines simplement connexes: $D_1, D_2, \dots, D_q$ situés sur W_0 et qui sont disjoints (même si l'on considère leure fermeture) les uns des autres. La partie de $W(r)$ située au-dessus de D_i sera décomposé en un nombre fini des surfaces F. Si F n'a aucun point frontière relativement à D_i, F s'appelle une île, et sinon, elle s'appelle une presqu'île.

Désignons par $n(D_i)$ la somme de tous les nombres moyens des

1) L. Ahlfors: Zur Theorie der Überlagerungsflächen, Acta Math., **65** (1935), p. 157–194.

feuillets des îles situées sur D_i, et par $n_1(D_i)$ la somme totales des ordres de ramification des toutes les îles sur D_i. M. L. Ahlfors a déduit de son théorème fondamental la relation suivante:

$$\sum_{i=1}^{q}\{S-n(D_i)\}+\sum_{i=1}^{q}n_1(D_i)\leq 2S+hL\,,$$

où S, L sont le nombre moyen des feuillets de $W(r)$, et la longueur totale de la frontière relative de $W(r)$, tous les deux par rapport à W_0. M. L. Ahlfors a enfin introduit deux définitions: nous appelons le défaut du domaine $\delta(D_i)$ et l'indice de ramification $\vartheta(D_i)$ les nombres:

$$\delta(D_i)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(D_i)}{S}\,;\quad \vartheta(D_i)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n_1(D_i)}{S}\,.$$

Nous avons alors $\vartheta(D_i)\geq 0$ et une relation

$$\sum_{i=1}^{q}\delta(D_i)+\sum_{i=1}^{q}\vartheta(D_i)\leq 2\,,$$

qui entraîne, de sa part, le grand théorème de M. Picard.

M. K. Noshiro[1] a premièrement montré qu'on peut utiliser la méthode de M. Ahlfors, pour l'étudier l'allure de la fonction inverse d'une fonction méromorphe $w=f(z)$. M. K. Noshiro a considéré le cas où la fonction inverse $z=\varphi(w)$ a un point singulier transcendante, soit Ω, dont la trace sera désignée par w. Décrivons un petit cercle S de centre ω et de rayon ρ ($\rho>0$). Désignons par $\varDelta_\rho$ l'ensemble de tous les points z, valeurs de la fonction $z=\varphi(w)$, pour w obtenues par le prolongement analytique en restant dans l'intérieur du cercle S, à partir d'un point situé près de Ω. Soient D_j ($j=1,2,\dots,q, q\geq 1$) des petit cercles situés dans l'intérieur de S et disjoints l'un de l'autre (même si l'on considère la circonférence ensemble). M. K. Noshiro a démontré qu'en supposant que $\varDelta_\rho$ est simplement connexe, nous avons

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(D_j,\varDelta_\rho)+\sum_{j=1}^{q}\vartheta(D_j,\varDelta_\rho)\leq 1\,,$$

où $\delta(D_j,\varDelta_\rho)$, $\vartheta(D_j,\varDelta_\rho)$ signifient les défauts et les indices de ramification.

Enfin, nous avons considère le théorème de M. K. Noshiro dans le cas où la connection du domaine $\varDelta_\rho$ est quelconque[2]. Noua avons obtenu au lieu de l'inégalité obtenu par M. Noshiro, la relation suivante:

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(D_j,\varDelta_\rho)+\sum_{j=1}^{q}\vartheta(D_j,\varDelta_\rho)\leq 2\,.$$

Maintenant, nous voyons que cette méthode nous permet d'établir le deuxième théorème fondamental sous la forme de M. L. Ahlfors, pour les fonctions méromorphes et uniformes $f(z)$ définies dans domaine D *quelconque*. En effet, supposons que les notations z_0, Ω_n, $\varDelta$ ont les

1) K. Noshiro: On the singularities of analytic functions. Japanese Journal of Mathematics, vol. XVII, 1940, p. 37-96.

2) K. Kunugui: Sur l'allure d'une fonction analytique uniforme au voisinage d'un point frontière de son domaine de définition. Japanese Journal of Mathematics, vol. XVIII, (1941).

mêmes significations données dans §§ 1–2. Soient encore $D_1, D_2, \dots, D_q$ $(q \geq 1)$ q petits domaines simplement connexes, qui sont contenus complètement dans l'intérieur de $\varDelta$ et dont les fermetures sont disjoints les unes des autres.

Prenons un nombre ρ_0 $(\rho_0 > 0)$ que nous avons défini dans § 2, et un rayon r $(r > \rho_0)$, et considérons l'ensemble ouvert $D_{\rho_0}(r)$ que nous avons aussi défini dans § 2. Cet ensemble $D_{\rho_0}(r)$ sera décomposé en un nombre $m = m(r)$ des domaines: $\varDelta^1(r), \varDelta^2(r), \dots, \varDelta^m(r)$, et ces domaines nous donnent m surfaces de Riemann que nous désignerons par $\varPhi_i = \varPhi_i(r)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. L'aire totale de $\sum \varPhi_i$ (mesurée sur la sphère de Riemann) sera écrite par $A(r)$. La partie de $\varPhi_i$ qui est située sur un D_j sera décomposée, de sa part, en un nombre fini des surfaces de Riemann. Toute partie décomposée de cette manière, dont l'ensemble correspondant dans le plan z n'a aucun point frontière sur les deux circonférences $|z| = \rho_0$ et $|z| = r$, s'appelle une *île*, et sinon, elle s'appelle une *presqu'île*. Le rapport de l'aire totale des îles situées sur D_j avec l'aire de D_j sera désigné par $n(r, j)$, et la somme des ordres de multiplicité de tous les points de ramification de toutes les îles sur D_j sera désignée par $n_1(r, j)$. Enfin, désignons par A_0 l'aire du domaine $\varDelta$ et par $S(r)$ la somme des nombres moyens des feuillets de $\varPhi_i$ $(i = 1, 2, 3, \dots, m)$ par rapport à $\varDelta$, c. à d. $S(r) = A(r)/A_0$. Posons

$$\delta(D_j) = \varliminf_{r \to \infty} \left\{ 1 - \frac{n(r, j)}{S(r)} \right\}, \quad \vartheta(D_j) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{n_1(r, j)}{S(r)} .$$

(Nous pourrons appeler, avec MM. Nevanlinna et Ahlfors, $\delta(D_j)$ et $\vartheta(D_j)$ le défaut et l'indice de ramification du domaine D_j). Nous pouvons alors montrer la relation du défaut:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(D_j) + \sum_{j=1}^{q} \vartheta(D_j) \leq 2 .$$

Remarquons enfin que cette relation entraîne immédiatement le théorème généralisé de M. Picard, que nous avons établi dans un autre travail[1].

Les démonstrations détaillées pour les énoncés de cette Note seront données dans un autre mémoire.

1) K. Kunugui: Sur un problème de M. A. Beurling, Proc. **16** (1940), 361–366.