14. *Sur la structure des ensembles.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale à Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Feb. 12, 1942.)

Mlle L. Keldych a écrit dans C. R. Acad. Sc. U. R. S. S. dès 1938 quelques notes sur les ensembles mesurables (B). Récemment, j'ai la chance de les lire avec intéresse et obtenu quelques résultats lies avec celles-ci. Ce sont ce que j'écrirai dans cette note.

La recherche de Mlle L. Keldych est fondée sur la notion de l'équivalence transfini, et les éléments canoniques de la classe α sont donnés sur ce point de vue. D'après ses résultats, deux éléments canoniques quelconques de la classe α sont homéomorphes et pour qu'un élément de la classe α soit canonique, il est nécessaire et suffisant qu'il soit sur chaque portion de sa ferméture un élément de la classe α universel de premier catégorie.

Dans sa démonstration de ces propositions, la notion de l'équivalence transfini a été toujours employée. Or, il me parait qu'on peut voir les sans fairer appeler celle-ci et de plus pour le cas plus général. Pour cela, nous posons d'abord le lemme suivant.

Lemme. Soit $\mathfrak{F}$ *une famille des ensembles linéaires telle qu'on ait*

(*1*) *quand nous avons* $E \in \mathfrak{F}$, *tout ensemble linéaire homéomorphe à* E *appartient aussi à* $\mathfrak{F}$,

(*2*) *quand nous avons* $E \in \mathfrak{F}$, *toute partie commune de* E *et un ensemble fermé appartient aussi à* $\mathfrak{F}$.

Si les deux ensembles $U^{(k)}$ $(k=1,2)$ *de* $\mathfrak{F}$ *jouissent des propriétés suivantes*

(*3*) $U^{(k)}$ $(k=1,2)$ *sont de premier catégorie dans leur ferméture* $\bar{U}^{(k)}$,

(*4*) *pour un ensemble* E *de* $\mathfrak{F}$, *il existe dans chaque portion de la ferméture* $\bar{U}^{(k)}$ *un ensemble fermé* $F^{(k)}$ *tel que la partie commune* $U^{(k)}$ *et* $F^{(k)}$ *soit homéomorphes* E,

$U^{(k)}$ $(k=1,2)$ *sont aussi homéomorphe à l'un l'autre.*

Démonstration. Puisque les ensembles $U^{(k)}$ $(k=1,2)$ sont de premier catégories dans leur ferméture, il existe deux suites des ensembles fermés $\{P_n^{(k)}\}$ $(k=1,2\,;\ n=1,2,\dots)$ telles qu'on ait $U^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(k)}U^{(k)}$ et que $P_n^{(k)}$ soit non dense dans la ferméture $\bar{U}^{(k)}$. Nous pouvons supposer ici sans perdre la généralité que $P_n^{(k)}$ $(n=1,2,\dots)$ soient parfaits et disjoints deux à deux.

Maintenant, nous définirons par l'induction une correspondance $\varphi(x)$ entre les points de $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ d'une manière suivantes. Soient ε_{mn} $(m,n=1,2,\dots)$ les nombres positifs tels qu'on ait $\lim_{m\to\infty} \sup_n \varepsilon_{mn}=0$. Comme nous avons $P_1^{(1)}E^{(1)} \in \mathfrak{F}$, il existe un ensemble fermé $Q_1^{(2)}$ tel que $Q_1^{(2)}E^{(2)}$

1) L. Keldych, Sur la structure des ensembles mesurables (B), C. R. Acad. Sc. U. R. S. S., **31** (1941).

est homéomorphe à $P_1^{(1)}E^{(1)}$ et nous définirons $\varphi(x)$ sur $P_1^{(1)}E^{(1)}$ par une homéomorphisme qui transforme $P_1^{(1)}E^{(1)}$ en $Q_1^{(2)}E^{(2)}$. Puis, en désignant par $I_{1,n}^{(2)}=[a_{1,n}^{(2)}, b_{1,n}^{(2)}]$ $(n=1, 2, \dots)$ les intervalles contigus à $Q_1^{(2)}$, nous prenons les bornes supérieure et inférieure de $\varphi(x)$ sur $[a_{1,n}^{(2)}-\varepsilon, b_{1,n}^{(2)}+\varepsilon]$, où ε est un nombre positif arbitraire. Ces deux nombres sont alors monotones par rapport à ε et donc ils convergent quand ε tend vers le null—nous désignons par $s_{1,n}^{(2)}$ et $t_{1,n}^{(2)}$ $(s_{1,n}^{(2)} \leqq t_{1,n}^{(2)})$ respectivement ces deux limites. Or, $Q_1^{(2)}+P_1^{(2)}$ est fermé et par suite il existe un ensemble fermé $Q_2^{(1)}$ tel que $P_1^{(1)} \subseteq Q_2^{(1)}$ et que $Q_2^{(1)}E^{(1)}$ soit homéomorphe à $(Q_1^{(2)}+P_1^{(1)})E^{(2)}$. Nous pouvons ici choisir une homéomorphisme $\psi(x)$ qui transforme $Q_2^{(1)}E^{(1)}$ en $(Q_1^{(2)}+P_1^{(2)})E^{(2)}$ de manière que

(1) $\psi(x)$ est une prolongation sur $Q_2^{(1)}E^{(1)}$ de $\varphi(x)$ définie sur $P_1^{(1)}E^{(1)}$,

(2) ψ^{-1} $(I_{1,n}^{(2)}E^{(2)}P_1^{(2)})$ $(n=1, 2, \dots)$ sont contenus dans les intervalles $[s_{1,n}^{(2)}-\varepsilon_{1,n}, t_{1,n}^{(2)}+\varepsilon_{1,n}]$ respectivement.

Nous définirons $\varphi(x)$ sur $Q_2^{(1)}E^{(1)}$ par l'homéomorphisme ainsi obtenue $\psi(x)$, c'est-à-dire, nous posons $\varphi(x)=\psi(x)$ sur $Q_2^{(1)}E^{(1)}$.

Alors, nous désignons par $I_{2,n}^{(1)}=[a_{2,n}^{(1)}, b_{2,n}^{(1)}]$ $(n=1, 2, \dots)$ les intervalles contigus à $Q_2^{(1)}$ et prenons les nombres supérieure et inférieure de $\varphi(x)$ sur $[a_{2,n}^{(1)}-\varepsilon, b_{2,n}^{(1)}+\varepsilon]$, où ε est un nombre positif arbitraire. Ces deux nombres sont alors monotones par rapport à ε et donc ils convergent lorsque ε tend vers le null—nous désignons par $s_{2,n}^{(1)}$ et $t_{2,n}^{(1)}$ $(s_{2,n}^{(1)} \leqq t_{2,n}^{(1)})$ ces deux nombres limites respectivement. Or, $Q_2^{(1)}+P_2^{(1)}$ est fermé et donc nous pouvons définir un ensemble fermé $Q_2^{(2)}$ tel que $P_1^{(2)}+Q_1^{(2)} \subseteq Q_2^{(2)}$ et que $Q_2^{(2)}$ soit homéomorphe à $Q_2^{(1)}+P_2^{(1)}$. Nous donnerons ici une homéomorphisme $\psi'(x)$ qui transforme $(Q_2^{(1)}+P_2^{(1)})E^{(1)}$ en $Q_2^{(2)}E^{(2)}$ de manière que

(1) $\psi'(x)$ est une prolongation sur $(P_2^{(1)}+Q_2^{(1)})E^{(1)}$ de $\varphi(x)$ définie sur $Q_2^{(1)}E^{(1)}$,

(2) $\psi'(I_{2,n}^{(1)}E^{(1)}P_2^{(1)})$ $(n=1, 2, \dots)$ sont contenus dans les intervalles $[s_{2,n}^{(1)}-\varepsilon_{2,n}, t_{2,n}^{(1)}+\varepsilon_{2,n}]$ respectivement.

Nous définirons $\varphi(x)$ sur $(P_2^{(1)}+Q_2^{(1)})E^{(1)}$ par l'homéomorphisme ainsi obtenue $\psi'(x)$, c'est-à-dire, nous posons $\varphi(x)=\psi'(x)$ sur $(P_2^{(1)}+Q_2^{(1)})E^{(1)}$.

Nous supposons maintenant que les ensembles $Q_j^{(k)}$ $(k=1,2; j=1,2,\dots, n-1)$ $(Q_1^{(1)}=0)$ soient définie déjà et que nous avons $\sum_{j=1}^{m-1}(P_j^{(k)}+Q_j^{(k)}) \subseteq Q_m^{(k)}$ $(m=1, 2, \dots, n-1)$ et qu'une homéomorphisme $\varphi(x)$ qui transforme $(P_m^{(1)}+Q_m^{(1)})E^{(1)}$ en $Q_m^{(2)}E^{(2)}$ et $Q_m^{(1)}E^{(1)}$ en $(P_m^{(2)}+Q_m^{(2)})E^{(2)}$ soit déjà définie. En désignant par $I_{n-1,m}^{(2)}=[a_{n-1,m}^{(2)}, b_{n-1,m}^{(2)}]$ $(m=1, 2, \dots)$ les intervalles contigus à $Q_{n-1}^{(2)}$, nous considérons les nombres supérieure et inférieure de $\varphi(x)$ sur $[a_{n-1,m}^{(2)}-\varepsilon, b_{n-1,m}^{(2)}+\varepsilon]$, où ε est un nombre positif arbitraire. Ces deux nombres convergent, quand ε tend vers le null—nous désignons par $s_{n-1,m}^{(2)}$ et $t_{n-1,m}^{(2)}$ $(s_{n-1,m}^{(2)} \leqq t_{n-1,m}^{(2)})$ respectivement leurs nombres limites. Or, $P_{n-1}^{(2)}+Q_{n-1}^{(2)}$ est fermé et par suite il existe un ensemble fermé $Q_n^{(1)}$ tel que $P_{n-1}^{(1)}+Q_{n-1}^{(1)} \subseteq Q_n^{(1)}$ et que $Q_n^{(1)}E^{(1)}$ soit homéomorphe à $(P_{n-1}^{(2)}+Q_{n-1}^{(2)})E^{(2)}$. Nous pouvons ici déterminer une homéomorphisme $\psi^{(n-1)}(x)$ qui transforme $Q_n^{(1)}E^{(1)}$ en $(P_{n-1}^{(2)}+Q_{n-1}^{(2)})E^{(2)}$ de la façon suivante:

(1) $\psi^{(n-1)}$ est une prolongation sur $Q_n^{(1)}E^{(1)}$ de $\varphi(x)$ définie sur $(P_{n-1}^{(1)}+Q_{n-1}^{(1)})E^{(1)}$,

(2) $\psi^{(n-1)^{-1}}$ $(I^{(2)}_{n-1,m}E^{(2)}P^{(2)}_{n-1})$ $(m=1, 2, \ldots)$ sont contenus dans les intervalles $[s^{(2)}_{n-1,m}-\varepsilon_{n-1,m}, t^{(2)}_{n-1,m}+\varepsilon_{n-1,m}]$ respectivement.

Maintenant, nous définissons $\varphi(x)$ sur $Q^{(1)}_nE^{(1)}$ par l'homéomorphisme ainsi obtenue $\psi^{(n-1)}(x)$. De même, en définissant l'ensemble $Q^{(2)}_n$, nous pouvons prolonger sur $(P^{(1)}_n+Q^{(1)}_n)E^{(1)}$ l'homéomorphisme $\varphi(x)$ définie sur $Q^{(1)}_nE^{(1)}$ de manière que $(P^{(1)}_n+Q^{(1)}_n)E^{(1)}$ est transformé en $Q^{(2)}_nE^{(2)}$.

Ainsi, une correspondance $\varphi(x)$ entre $E^{(1)}$ et $E^{(2)}$ est définie par l'induction. Or, nous pouvons voir qu'elle est une homéomorphisme, d'où $E^{(1)}$ et $E^{(2)}$ sont homéomorphes l'un l'autre. C. Q. F. D.

Nous avons alors

Théorème 1. Quand $\Phi(E_n)$ est une opération analytique[1] *et régulière des ensembles, tous les ensembles de premier catégorie par rapport à leur ferméture qui sont sur chaque portion de leur ferméture universel de la famille $\Phi(R)$*[2]*, où R est le domain fondamental, c'est-à-dire, l'ensemble de tout les nombres irrationnels,—il existe précisément tels ensembles dans $\Phi(R)$ et nous les appellons les éléments canoniques de $\Phi(R)$—sont homéomorphes deux à deux.*

Remarque. Nous donnerons ici la définition pour ces terminologies employées dans ce théorème. Nous dirons qu'une opération analytique $\Phi(E_n)$ est régulière[3], quand, quelque soit la décomposition de R en les ensembles $G_\delta : R_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire, $R=\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ et $R_mR_n=0$ $(m \neq n)$, $E_n \in \Phi(R_n)$ entrainent $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \Phi(R)$, et qu'un ensemble U est universel de la famille $\mathfrak{F}$ sur chaque portion de sa ferméture $\bar{U}$, quand quelques soient l'ensemble E de $\mathfrak{F}$ et la portion I de $\bar{U}$, il existe un ensemble fermé F tel que $F \leq I$ et que la partie commune FU est homéomorphe à E.

La démonstration de ce théorème est déduit directement de ce lemme. En effet, comme $\Phi(E_n)$ est régulière, $\Phi(R)$ est topologique[4] et la partie commune d'un ensemble de $\Phi(R)$ et un ensemble fermé appartient aussi à $\Phi(R)$, et donc $\Phi(R)$ remplit les conditions (1) et (2) de ce lemme, d'où tous les éléments canoniques de $\Phi(R)$ sont homéomorphes deux à deux. Pour voir l'existence des éléments canoniques de $\Phi(R)$, nous donnerons ici un exemple de tel ensemble. En prenant les ensembles parfaits et non denses P_n $(n=1, 2, \ldots)$ dans R de manière que P_n sont disjoints deux à deux, que le diamètre

---

1) L. Kantorovitch et E. Livenson, Memoir on the analytical operations and projective sets I, Fund. Math., **18** (1932) et II, Fund. Math., **20** (1933), M. Kondô, Sur les opérations analytiques dans la théorie des ensembles et quelques problèmes qui s'y rattachent I, Jour. Fac. Sc. Hokkaido Imp. Univ., ser. I, **7** (1938) et II, ibid. **10** (1941).

2) $\Phi(R)$ désigne la famille des tout les ensembles $\Phi(E_n)$ obtenus quand la suite $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ parcourt toute celle des ensembles fermés de R.

3) La notion de la régularité des opérations analytiques des ensembles a été introduit par moi à la conférence qui a eu lieu à Sendai le novembre 1941, de la société physico-mathématique du Japon et elle est très intéressant dans la théorie des opérations analytiques des ensembles.

4) Nous dirons qu'une opération analytique $\Phi(E_n)$ des ensembles est topologique, quand quelque soit l'espace métrique complet R, $\Phi(R)$ est toujour topologique. Voir ma note loc. cit.

$\delta(P_n)$ de P_n converge vers le null quand n croit indéfiniment et que $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ est partout dense dans R, nous définirons les ensembles $U^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ homéomorphes à un ensemble universel de $\Phi(R)$ dans P_n respectivement. La somme $\sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}$ est alors un élément canonique de $\Phi(R)$ et appartient à $\Phi(R)$. C. Q. F. D.

Comme on sait, il y a les plusieurs exemples des opérations analytiques et régulières des ensembles, par exemple les opérations analytiques qui donnent les familles des éléments (ou ensembles accessibles inférieurement[1]) de la classe α $(\alpha \geqq 1)$ des ensembles mesurables (B), des ensembles analytiques, des complémentaires analytiques, des ensembles projectifs de la classe n $(n \geqq 1)$ etc. sont toutes régulières. Donc, il existe dans ces familles toujours les éléments canoniques. En particulier

Corollaire 1. Dans la famille des ensembles analytiques, les éléments canoniques sont ceux homéomorphes à la produit directe de l'ensemble de Lebesgue et l'ensemble de tous les nombres rationnels.

Corollaire 2. Dans la famille de tous les éléments (ou ensembles accessible inférieurement) de la classe α $(\alpha \geqq 1)$ des ensembles mesurables (B), il y a les éléments canoniques.

C'est un résultat obtenu par Mlle L. Keldych[2]. Or, nous pouvons voir un théorème obtenue par elle

Théorème 2. Chaque élément de la classe α $(\alpha \geqq 1)$ des ensembles mesurables (B) est la somme d'un élément canonique E_α de la famille des éléments de la classe α et d'une infinité dénombrable au plus d'-ensembles de classe inférieure à α n'ayant pas de points commun avec E_α.

directement au point de vue de notre place. En effet, soit E un élement de la classe α des ensembles mesurables (B). Supposons d'abord que E soit de premier catégorie dans sa ferméture. Nous pouvons alors choisir les ensembles parfaits P_{mn} $(m, n=1, 2, \ldots)$ de la façon que $P_{mn} \subseteq E$ et que chaque point de condensation de E est celui de $\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}$. Comme E est de premier catégorie dans sa ferméture, il y a les ensembles fermés non denses F_n $(n=1, 2, \ldots)$ tels que $E=\sum_{n=1}^{\infty} EF_n$. Or, en prenant dans chaque ensemble P_{mn} un ensemble U_{mn} homéomorphe à un ensemble universel de la famille des éléments de la classe α, nous considérons

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_m+\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}\Big\}.$$

Nous avons alors que $(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_m+\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}$ sont les éléments canonique et que $P_{mn}-U_{mn}$ $(m, n=1, 2, \ldots)$ sont la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles des classes $<\alpha$. Puisque la somme S est aussi un élément canonique, le théorème 2 a lieu pour ce cas.

1) N. Lusin, Leçon sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930.
2) Mlle L. Keldych loc. cit.

Puis nous considérons le cas où E est de partout deuxieme catégorie dans sa ferméture. Nous prenons dans E un ensemble $F_\sigma : F$ de premier catégorie par rapport à $\bar{E}$ tel que chaque point de E soit un point de condensation de F. Comme E jouit de la propriété de Baire, il existe dans $E-F$ un ensemble $G_\delta : G$ tel que $E-(F+G)$ soit de premier catégorie par rapport à $\bar{E}$. Nous avons alors

$$E=(F+G)+\{E-(F+G)\}$$

et donc d'après le resultat obtenu précédent ce théorème a aussi lieu pour ce cas, d'où on voit sans peine que il est vrai pour le cas plus général. C. Q. F. D.

D'après ce théorème, nous savons que chaque ensemble de la classe α est la somme d'une infinité dénombrable des éléments canoniques de la famille des éléments de la classe α et les ensembles des classes $<\alpha$[1]. Or, nous pouvons voir le

Théorème 3. Soit U un ensemble qui est universel pour les éléments de la classe α et qui est de deuxième catégorie dans sa ferméture. Tous ensembles mesurables (B) de la classe α peuvent être représenté comme une somme d'une infinité dénombrable au plus d'ensembles homéomorphes à U et une infinité dénombrable au plus de points sans points communs deux à deux.

Démonstration. Soit E un ensemble mesurable (B) de la classe α. Il suffit alors de considérer le cas où E est condensé en soi. Nous prenons dans E les ensembles parfaits $P_{m,n}$ $(m, n=1, 2, \dots)$ de la façon que

(1) $P_{m,n}$ $(m, n=1, 2, \dots)$ sont disjoints deux à deux et le diamètre de $P_{m,n} < \dfrac{1}{m+n}$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n}$ $(m=1, 2, \dots)$ sont partout denses dans E.

Nous considérons d'abord le cas où E est de premier catégorie dans sa ferméture. Il existe alors les ensembles fermés F_n $(n=1,2,\dots)$ non denses dans la ferméture $\bar{E}$ tels qu'on ait $E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk}=\sum_{n=1}^{\infty}(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_n$.

Etant donné $(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_n$, nous choisirons les nombres naturels $\nu_{n_1}^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots)$ de manière que $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}}$ est partout dense dans E. Quand nous désignons par $U_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}}$ un ensemble homéomorphe à U et contenu dans $P_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}}$, la somme $\sum_{k=1}^{\infty} U_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}}$ est un élément canonique et donc $(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty} U_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}}$ est aussi canonique, d'où cet ensemble est homéomorphe à $\sum_{k=1}^{\infty} U_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}}$. Or, $\sum_{k=1}^{\infty} (P_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}} - U_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}})$ est un ensemble accessible inférieurement de la classe α et par suite il existe les éléments $F_{n_1 n_2}$ $(n_2=1, 2, \dots)$ de la classe $<\alpha$ tels qu'on ait $F_{n_1 n_2} F_{n_1' n_2'}=0$ pour $n_1 \neq n_1'$ ou $n_2 \neq n_2'$ et $\sum_{n_2=1}^{\infty} F_{n_1 n_2}=\sum_{k=1}^{\infty} (P_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}} - U_{k,\, \nu_{n_1}^{(k)}})$. Puis, en pre-

1) Mlle L. Keldych, loc. cit.

nant les nombres naturels $\nu^{(k)}_{n_1n_2}$ $(k=1, 2, \dots)$ de la façon que $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}$ est partout dense dans E, nous considérons les ensembles $U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}$ homéomorphes à U et contenu dans $P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}$. La somme $\sum_{k=1}^{\infty} U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}$ est alors un élément canonique et donc $F_{n_1n_2}+\sum_{k=1}^{\infty} U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}$ est aussi canonique. $\sum_{k=1}^{\infty}(P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}-U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2})$ est un ensemble accessible inférieurement de la classe α et il existe les éléments $F_{n_1n_2n_3}$ $(n_3=1, 2, \dots)$ de la classe $<\alpha$ tels que $F_{n_1n_2n_3}F_{n_1'n_2'n_3'}=0$ pour $n_1 \neq n_1'$, $n_2 \neq n_2'$ ou $n_3 \neq n_3'$ et $\sum_{n_3=1}^{\infty} F_{n_1n_2n_3}=\sum_{k=1}^{\infty}(P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2}-U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2})$. Nous pouvons donner les nombres naturels $\nu^{(k)}_{n_1n_2n_3}$ $(k=1, 2, \dots)$ et les ensembles $U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2n_3}$ $(k=1, 2, \dots)$ comme il suit,

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2n_3}$ est partout dense dans E,

(2) $U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2n_3}$ est homéomorphe à U et contenu dans $P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2n_3}$,

Il est alors evident que $F_{n_1n_2n_3}+\sum_{k=1}^{\infty} U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2n_3}$ est canonique de la classe α.

De même, nous pouvons définir les nombres naturels $\nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ $(k, j=1, 2, \dots)$ les ensembles $F_{n_1n_2\dots n_j}$ $(j=1, 2, \dots)$ et $U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ $(j=1, 2, \dots)$ qui remplissent les conditions

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}-U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j})=\sum_{n_{j+1}=1}^{\infty} F_{n_1n_2\dots n_jn_{j+1}}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ est partout dense dans E,

(3) $U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ est homéomorphe à U et contenu dans $P_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$.

Or, nous pouvons choisir pour un nombre fixé les nombres naturels $\nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ $(k, j=1, 2, \dots)$ de la façon que

(4) $\nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ $(n_1 \cdots n_j=1, 2 \dots)$ sont distincts deux à deux,

(5) quelque soit le nombre naturel p, il existe un nombre $\nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}$ tel qu'on ait $=p$.

Nous avons alors

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_n+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk}$$

$$=\sum_{n_1=1}^{\infty}\Big\{(E-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{jk})F_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty} U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1}\Big\}+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_1\dots n_j}^{\infty}\Big\{F_{n_1n_2\dots n_j}+\sum_{k=1}^{\infty} U_{k}, \nu^{(k)}_{n_1n_2\dots n_j}\Big\}$$

et donc E est une somme d'une infinité dénombrable au plus des ensembles homéomorphes à U et disjoints deux à deux.

Quand E est de deuxième catégorie dans sa ferméture, en prenant les ensembles P_{mn} $(m, n=1, 2, \dots)$ dans E comme le cas précédent, nous considérons $E-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}$. Comme il jouit de la propriété de Baire, il existe un ensemble $G_\delta: G$ tel que $E-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}-G$ soit de premier catégorie sur la ferméture $\bar{E}$. Or, G est homéomorphe au domaine fondamental et donc d'après la supposition nous pouvons donner dans G un ensemble $U^{(1)}$ homéomorphe à U et deuxième catégorie dans G. Par suite, il existe une suite $\{U^{(k)}\}$ $(k=1, 2, \dots)$ des ensembles telle qu'on ait

(1) $G-\sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}$ est de premier catégorie dans $\bar{E}$,

(2) $U^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots)$ sont disjoints deux à deux et homéomorphes à U.

Nous avons

$$E=\sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}+\left\{E-\sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}\right\}$$

et $E-\sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}$ est de premier catégorie dans la ferméture $\overline{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}}$. Donc, d'après le résultat précédent, E est décomposé en d'une infinité dénombrable au plus des ensembles homéomorphes à U et disjoints deux à deux. C. Q. F. D.

De même, nous avons le

Théorème 4. Soit U un ensemble qui est universel pour les éléments de la classe α qui est de premier catégorie dans sa ferméture. Tous les ensembles mesurables (B) de la classe α et de premier catégorie dans leur ferméture peuvent être représenté comme une somme d'une infinité dénombrable au plus d'ensembles homéomorphes à U et une infinité dénombrable au plus de points sans points communs deux à deux.

Ici, on peut poser le problème suivant.

Etant donné un ensemble N contenu dans le domaine fondamental et mesurable (B) de la classe α, peut-on représenter tout ensemble mesurable (B) de la classe α comme une somme d'une infinité dénombrable au plus d'ensembles homéomorphes à N et une infinité dénombrable au plus de points?

Pour être resolu affirmativement ce problème, il faut que N est non accessible inférieurement de la classe α et de deuxième catégorie dans sa ferméture, mais je ne sais pas si ces conditions sont aussi suffisantes. D'après le théorème 3, quand N remplit de plus une condition qu'il est universel pour les éléments de la classe α, ce problème est resolu affirmativement.

En autre part, nous avons sur les ensembles analytiques les suivants.

Théorème 5. Pour tout ensemble E analytique et indénombrable, il existe une élément canonique F des ensembles analytiques tel que la différence $E-F$ soit un complémentaire analytique.

Théorème 6. Chaque ensemble analytique et indénombrable peut être représenté comme une somme d'une infinité dénombrable au plus d'ensemble homéomorphes à celui de Lebesgue, d'ensembles homéomorphes au complementaire de celui de Lebesgue et une infinité dénombrable au plus de points sans points communs deux à deux.

Remarque. Dans cette note j'ai employé souvent les propriétés suivantes sur les éléments canoniques:

(1) lorsque les ensembles E_n ($n=1, 2, \dots$) sont canoniques de $\Phi(R)$ et disjoints les uns les autres, la somme $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est aussi canonique de $\Phi(R)$.

(2) lorsque E est un élément canonique de $\Phi(R)$ et que F est un ensemble de $\Phi(R)$ et de premier catégorie dans la fermeture $\overline{E}$, la somme $E+F$ est aussi canonique.

Mais, nous pouvons trouver les diverses applications de ces propriétés, par exemple, quelques théorèmes sur la représentation paramétrique sont démontrés simplement.