10. *Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. I.*

Von Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1942.)

Wie in der vorangehenden Note bezeichnet k einen *diskret perfekten* Körper in bezug auf einen Primdivisor $\mathfrak{p}$, und der Restklassenkörper $k/\mathfrak{p}$ besitzt wieder die im Anfang der vorangehenden Note aufgestellten Beschaffenheiten 1) und 2).

Ich will in den in einer Reihe erscheinenden Noten zu zeigen versuchen, wie man über k als Grundkörper die *Klassenkörpertheorie im Kleinen* aufbauen kann. Die Sätze aus der klassischen Klassenkörpertheorie im Kleinen lassen sich hier auch, abgesehen vom *Existenzsatz,* rein arithmetisch und algebraisch beweisen. Den Beweis des Existenzsatzes kann man aber nicht mehr rein arithmetisch und algebraisch erbringen; vielmehr muß man dazu die topologische Methode heranziehen.

Die multiplikative abelsche Gruppe, welche alle von Null verschiedenen Elemente aus k bilden, soll im folgenden durchweg mit A bezeichnet werden. Für eine endliche separable Erweiterung K über k bezeichnet $H(K, k)$ die Gesamtheit der Normen aller von Null verschiedenen Elemente aus K nach k, und wird im folgenden stets die K zugeordnete *Normgruppe* in k genannt. Eine endliche separable Erweiterung K über k heißt ein *Klassenkörper* (über k), wenn

$$(K:k)=\big(A:H(K, k)\big)$$

gilt.

Im vorliegenden Teil I beweise ich den sogenannten Umkehrsatz, Isomorphiesatz und Eindeutigkeitssatz für die *abelschen* Klassenkörper. Daß jeder Klassenkörper über k stets abelsch ist, wird erst im Teil II bewiesen.

1. Satz 1. *Ist Z eine separable zyklische Erweiterung vom Grade n über k, so ist Z stets ein Klassenkörper über k, und die Galoisgruppe von Z über k ist isomorph mit der Klassengruppe $A/H(Z, k)$.*

Beweis. Eine normale einfache Algebra vom Grade n über k besitzt Z als einen Zerfällungskörper[1]; sie ist also zu einer zyklischen Algebra (a, Z, T) ähnlich, wobei a ein Element aus k und T einen erzeugenden Automorphismus von Z über k bezeichnet. Umgekehrt ist für ein Element a aus A die Algebra (a, Z, T) eine normale einfache Algebra vom Grade n über k. Ordnet man also einem Element a aus A die (a, Z, T) enthaltende Algebrenklasse über k zu, so entsteht ein Homomorphismus von A auf diejenige Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ aus der Algebrenklassengruppe über k, die aus allen Algebrenklassen besteht, deren

1) Vlg. die vorangehende Note M. Moriya, Algebrenklassengruppen über diskret perfekten Körpern, Satz 1.

Indizes Teiler von n sind. Durch den oben definierten Homomorphismus gehen alle und nur alle Elemente aus $H(Z, k)$ in die Einsklasse aus $\mathfrak{G}_0$ über; also ist wie bekannt:

$$A/H(Z, k) \cong \mathfrak{G}_0 .$$

Weil $\mathfrak{G}_0$ eine zyklische Gruppe von der Ordnung n ist[1], so wird $A/H(Z, k)$ zyklisch von der Ordnung n, w. z. b. w.

Um jetzt den Eindeutigkeitssatz für die zyklischen Klassenkörper zu beweisen, schicken wir einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 1. Es seien Z_1 und Z_2 separable zyklische Erweiterungen von einem Primzahlgrad l über k, und $Z_1 \frown Z_2 = k$. Ferner sei Z ein beliebiger Teilkörper vom Grade l über k aus dem Kompositum Z_1Z_2 von Z_1 und Z_2. Ist dann ein Element a aus k Norm eines Elementes aus Z_1 bzw. Z_2, so ist a auch Norm eines Elementes aus Z.

Beweis. Es genügt nur den Fall zu betrachten, wo $a \neq 0$ ist. Es bezeichne S_1 bzw. S_2 einen erzeugenden Automorphismus von Z_1 bzw. Z_2 über k. Nach Voraussetzung ist dann Z_1Z_2 separabel abelsch vom Grade l^2 über k; ferner ist die Galoisgruppe von Z_1Z_2 über k vom Typus (l, l). Wie üblich kann man hierbei annehmen, daß die Galoisgruppe von Z_1Z_2 über k von S_1 und S_2 erzeugt ist. Wenn man weiter S_1 und S_2 von vornherein passend wählt, so wird Z der zur Gruppe $\{S_1S_2\}$ gehörige Teilkörper von Z_1Z_2/k.

Es sei $\bar{a}_1$ bzw. $\bar{a}_2$ ein Element aus Z_1 bzw. Z_2 derart, daß $N_{Z_1k}(\bar{a}_1) = a = N_{Z_2k}(\bar{a}_2)$ ist. Dann ist offenbar $N_{Z_1Z_2, Z}(\bar{a}_1\bar{a}_2^{-1}) = 1$; es gibt also in Z_1Z_2 ein Element $\bar{b}$, für welches $\bar{a}_1\bar{a}_2^{-1} = \bar{b}^{1-S_1S_2}$ gilt[2]. Bildet man nun das Element $\bar{c} = \bar{a}_1\bar{b}^{S_1-1}$, so gehört $\bar{c}$, wie leicht bestätigt wird, zu Z, und es gilt:

$$N_{Z, k}(\bar{c}) = N_{Z_1, k}(\bar{a}_1) N_{Z_1Z_2, Z_2}(\bar{b}^{S_1-1}) = a ,$$

weil $N_{Z_1Z_2, Z_2}(\bar{b}^{S_1-1}) = 1$ ist, w. z. b. w.

Satz 2. *Es sei H eine Untergruppe von einem endlichen Index unter A und A/H zyklisch. Dann existiert über k höchstens ein zyklischer Klassenkörper, dessen Normgruppe in k gleich H ist.*

Beweis. Wir beweisen zunächst den Satz im Fall, wo $(A : H)$ eine Primzahl l ist. Angenommen, es wären Z_1 und Z_2 verschiedene zyklische Klassenkörper über k, welche H als die Normgruppe besitzen. Da es über k bis auf Äquivalenz nur eine einzige separable unverzweigte Erweiterung vom Grade l gibt, so muß wenigstens eines von Z_1 und Z_2, etwa Z_1, vollverzweigt sein. Wenn also π_1 ein Primelement des Primteilers von $\mathfrak{p}$ aus Z_1 bezeichnet, so ist $N_{Z_1, k}(\pi_1) = \pi$ ein Primelement von $\mathfrak{p}$ aus k. Da $\pi \in H$ ist, so ist π auch Norm eines Elementes aus Z_2 nach k; daher ist Z_2 über k voll-verzweigt, weil sonst π^l die früheste positive Potenz von π in H sein müsste.

Enthielte nun das Kompositum Z_1Z_2 von Z_1 und Z_2 die separable unverzweigte Erweiterung W vom Grade l über k, so wäre π nach

1) M. Moriya, loc. cit. Satz 3.

2) Vgl. hierzu etwa M. Deuring, Algebren, Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete, **4** (1935), S. 67.

Hilfssatz 1 Norm eines Elementes aus W nach k, was aber ein Widerspruch ist. Das Kompositum Z_1Z_2 ist also über k voll-verzweigt.

Wir bezeichnen nun mit S_1, S_2, S bzw. die erzeugenden Automorphismen von Z_1, Z_2, W über k. Da Z_1, Z_2, W über k unabhängig sind, so können wir wie üblich annehmen, daß die Galoisgruppe des Kompositums K von Z_1, Z_2, W über k gleich dem direkten Produkt $\{S_1\}\times\{S_2\}\times\{S\}$ ist.

Bildet man nun den zur Gruppe $\{SS_1\}$ gehörigen Körper K_0 über k, so enthält K_0 den Körper Z_2, weil die Z_2 zugeordnete Gruppe gleich $\{S, S_1\}$ ist; ferner ist K_0 über k voll-verzweigt, weil sonst W zur Gruppe $\{SS_1, S_1, S_2\}=\{S_1\}\times\{S_2\}\times\{S\}$ gehören müsste. Für ein Primelement Π des Primteilers von $\mathfrak{p}$ aus K_0 ist $N_{K_0,k}(\Pi)=\pi_0$ ein Primelement von $\mathfrak{p}$. Wegen $\pi_0=N_{Z_2,k}\big(N_{K_0,Z_2}(\Pi)\big)$ gehört π_0 zu H, und infolgedessen ist π_0 auch Norm eines Elementes aus Z_1 nach k.

Betrachtet man nun den Körper $K_0\frown Z_1W$, so ist er zyklisch vom Grade l über k, weil $\{SS_1, S_2\}$ die $K_0\frown Z_1W$ zugeordnete Untergruppe ist; das Primelement π_0 von $\mathfrak{p}$ aus k ist daher Norm eines Elementes aus $K_0\frown Z_1W$. Da offenbar W im Kompositum von Z_1 und $K_0\frown Z_1W$ enthalten ist, so ist nach Hilfssatz 1 π_0 Norm eines Elementes aus W nach k, was aber unmöglich ist. Der Satz ist daher im Fall bewiesen, wo $(A:H)$ eine Primzahl ist.

Es sei nun $(A:H)=n>1$ und A/H zyklisch. Dann können wir annehmen, daß der Satz schon für alle diejenigen Untergruppen von A mit zyklischen Faktorgruppen bewiesen ist, deren Indizes kleiner sind als n. Wir beweisen jetzt, daß ein zyklischer Klassenkörper Z über k, dessen Normgruppe H ist, durch H eindeutig bestimmt wird. Ist nun l ein Primteiler von n, so existiert in Z ein zyklischer Teilkörper Z_0 vom Grade $\frac{n}{l}$ über k. Die Z_0 zugeordnete Normgruppe $\bar{H}$ ist daher als eine H enthaltende Untergruppe vom Index $\frac{n}{l}$ unter A eindeutig bestimmt, weil A/H zyklisch ist. Da $A/\bar{H}$ zyklisch ist, so ist Z_0 nach Induktionsannahme als der Klassenkörper mit $\bar{H}$ als der Normgruppe in k (aber nicht als ein zyklischer Teilkörper vom Grade $\frac{n}{l}$ von Z/k) eindeutig bestimmt. Ferner besitzt der Restklassenkörper von Z_0 die im Anfang der vorangehenden Note aufgestellten Beschaffenheiten 1) und 2).

Da Z über Z_0 separabel zyklisch vom Primzahlgrad l ist, so ist Z ein Klassenkörper über Z_0. Bezeichnet nun A_0 die Gruppe aller von Null verschiedenen Elemente aus Z_0, und H_0 die Gruppe aller derjenigen Elemente aus Z_0, deren Normen nach k in H hineinfallen, so ist offenbar $H_0\geqq H(Z, Z_0)$. Durch Normbildung gehen A_0, H_0 bzw. in $\bar{H}, H$ über; ferner ist

$$A_0/H_0\cong\bar{H}/H.$$

Da $(A:\bar{H})=\frac{n}{l}$ und $n=(A:\bar{H})(\bar{H}:H)$ ist, so ist $(A_0:H_0)=l$. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$H_0 = H(Z, Z_0),$$

weil $H_0 \geqq H(Z, Z_0)$ und $(A_0 : H_0) = l = \big(A_0 : H(Z, Z_0)\big)$ ist. Da H_0 durch Z_0 und H eindeutig bestimmt ist, so ist Z als der Klassenkörper über Z_0, deren Normgruppe in Z_0 gleich H_0 ist, eindeutig bestimmt, w. z. b. w.

2. Hilfssatz 2. Es sei K eine endliche, separable galoissche Erweiterung über k. Dann ist stets

$$\big(A : H(K, k)\big) \,\big|\, (K : k).$$

Beweis. Wir schließen von vornherein einen trivialen Fall aus, wo $K = k$ ist, und nehmen $(K : k) > 1$ an. Da K über k auflösbar ist[1], so existiert eine Körperkette $k = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_\nu = K$ derart, daß die K_i/K_{i-1} $(i = 1, \ldots, \nu)$ zyklisch von Primzahlgrad sind. Wenn $\nu = 1$ ist, so ist $\big(A : H(K, k)\big) = (K : k)$, weil dabei K ein Klassenkörper über k ist. Wir nehmen also an, daß der Satz bis $\nu = n$ gültig ist. Es sei nun $\nu = n + 1$. Dann ist $K = K_{n+1}$ separabel galoissch über K_1. Nach Induktionsannahme gilt also:

$$\big(A_1 : H(K, K_1)\big) \,\big|\, (K : K_1),$$

wo A_1 die Gruppe aller von Null verschiedenen Elemente aus K_1 bezeichnet. Bezeichnet nun H_1 die Gruppe aller derjenigen Elemente aus K_1, deren Normen nach k in $H(K, k)$ hineinfallen, so ist

$$(A_1 : H_1) \,|\, (K : K_1),$$

weil $H_1 \geqq H(K, K_1)$ ist. Durch Normbildung erhält man:

$$\big(H(K_1, k) : H(K, k)\big) = (A_1 : H_1).$$

Da offenbar $\big(A : H(K, k)\big) = \big(A : H(K_1 : k)\big)\big(H(K_1, k) : H(K, k)\big)$ und $\big(A : H(K_1, k)\big) = (K_1 : k)$ ist, so ist

$$\big(A : H(K, k)\big) \,\big|\, (K : K_1)(K_1 : k), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 3. Umkehr- und Isomorphiesatz.

Es sei L eine endliche separable abelsche Erweiterung über k. Dann ist L ein Klassenkörper, und die Galoisgruppe von L über k ist isomorph zu $A/H(L, k)$.

Beweis. Nach der galoisschen Theorie ist L aus endlich vielen, über k unabhängigen separablen zyklischen Erweiterungen zusammengesetzt. Die Anzahl solcher unabhängigen separablen zyklischen Erweiterungen sei r. Ist dann zunächst $r = 1$, so ist der Satz bereits in Satz 1 bewiesen. Wir nehmen also an, daß der Satz für die Körper schon bewiesen ist, welche aus höchstens $r - 1$ separablen zyklischen, über k unabhängigen Körpern zusammengesetzt ist. Es seien nun $Z_1, \ldots, Z_r$ separable zyklische, über k unabhängige Erweiterungen, aus denen L zusammengesetzt ist. Dann ist nach Induktionsannahme das

1) M. Deuring, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann., **105** (1931), S. 277–307.

Kompositum L_0 von $Z_1, \dots, Z_{r-1}$ ein Klassenkörper über k, und die Galoisgruppe $\mathfrak{G}_0$ von L_0 über k ist zu $A/H(L_0, k)$ isomorph. Bezeichnet nun $\mathfrak{G}_r$ die Galoisgruppe von Z_r über k, so ist die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L über k gleich dem direkten Produkt $\mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{G}_r$.

Für das Kompositum H von $H(L_0, k)$ und $H(Z_r. k)$ ist A/H zyklisch, weil wegen $H \geqq H(Z_r, k)$ A/H einer Faktorgruppe aus $A/H(Z_r, k)$ isomorph ist. Der Index $(A:H)$ sei durch n bezeichnet. Jedem zyklischen Teilkörper vom Grade n über k aus L_0 entspricht dann nach dem Hauptsatz der galoisschen Theorie genau eine Untergruppe vom Index n mit zyklischer Faktorgruppe aus $\mathfrak{G}_0$. Da nach Induktionsannahme $\mathfrak{G}_0 \cong A/H(L_0, k)$ ist, so gibt es genau so viele $H(L_0, k)$ enthaltende Untergruppen vom Index n mit zyklischen Faktorgruppen wie die Untergruppen vom Index n mit zyklischen Faktorgruppen aus $\mathfrak{G}_0$. Da nach Satz 2 verschiedenen zyklischen Körpern stets verschiedene Normgruppen in k zugeordnet sind, so schließt man ohne weiteres, daß es in L_0 einen zyklischen Teilkörper Z vom Grade n über k gibt, dessen Normgruppe in k H ist. Ebenso ist Z in Z_r enthalten, weil $\mathfrak{G}_r \cong A/H(Z_r, k)$ und $A/H(Z_r, k)$ zyklisch ist. Da $L_0 \frown Z_r = k$ ist, so muß $Z = k$ sein; d. h. $H = A$.

Nach einem Isomorphiesatz gilt nun:

$$A/H(Z_r, k) \cong H(L_0, k)/H(Z_r, k) \frown H(L_0, k);$$

hieraus folgt ohne weiteres:

$$\begin{aligned}\big(A : H(L_0, k) \frown H(Z_r, k)\big) &= \big(A : H(L_0, k)\big)\big(A : H(Z_r, k)\big) \\ &= (L_0 : k)(Z_r : K) = (L : k).\end{aligned}$$

Da anderseits $H(L, k) \leqq H(L_0, k) \frown H(Z_r, k)$ und nach Hilfssatz 2 $\big(A : H(L, k)\big) \leqq (L : k)$ ist, so muß $\big(A : H(L, k)\big) = (L : k)$ sein; d. h. L ist ein Klassenkörper über k.

Da offenbar $H(L_0, k)/H(L, k) \cdot H(Z_r, k)/H(L, k) = A/H(L, k)$ und $\big(A : H(L, k)\big) = \big(A : H(Z_r, k)\big)\big(H(Z_r, k) : H(L, k)\big) = \big(H(L_0, k) : H(L, k)\big) \cdot \big(H(Z_r, k) : H(L, k)\big)$ ist, so besitzen $H(L_0, k)/H(L, k)$ und $H(Z_r, k)/H(L, k)$ nur die Klasse $H(L, k)$ gemeinsam; d. h. es gilt:

$$A/H(L, k) \cong H(L_0, k)/H(L, k) \times H(Z_r, k)/H(L, k).$$

Weil nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_0 &\cong A/H(L_0, k) \cong H(Z_r, k)/H(L, k) \text{ und} \\ \mathfrak{G}_r &\cong A/H(Z_r, k) \cong H(L_0, k)/H(L, k)\end{aligned}$$

ist, so ist offenbar

$$A/H(L, k) \cong \mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{G}_r \cong \mathfrak{G};$$

somit ist der Isomorphiesatz bewiesen.

Aus Satz 3 folgt nun

Satz 4. Eindeutigkeitssatz. *Es existiert zu einer Untergruppe H von endlichem Index unter A höchstens ein Klassenkörper über k, dessen Normgruppe in k gleich H ist.*

Beweis. Es seien L_1 und L_2 Klassenkörper über k, deren Normgruppen in k gleich H sind. Bezeichnet dann $S_i(n)(i=1,2)$ die Anzahl der zyklischen Teilkörper von L_i, deren Grade nach k gleich n sind, so sind die diesen $S_i(n)$ zyklischen Teilkörpern zugeordneten Normgruppen in k nach Satz 2 voneinander verschieden; sie enthalten aber $H(L, k)=H$ und bilden unter A zyklische Faktorgruppen von der Ordnung n. Aus Satz 3 folgt ohne weiteres $S_1(n)=S_2(n)$, und zu einer Untergruppe $H^{(0)}$ zwischen A und H, welche unter A eine zyklische Faktorgruppe von der Ordnung n bildet, existieren in L_1 und L_2 bzw. die zyklischen Teilkörper $Z_1^{(0)}$ und $Z_2^{(0)}$ vom Grade n über k, welche $H^{(0)}$ als die Normgruppe besitzen. Nach Satz 2 müssen $Z_1^{(0)}$ und $Z_2^{(0)}$ übereinstimmen. Ein zyklischer Teilkörper von L_1 bzw. L_2 über k ist daher in L_2 bzw. L_1 enthalten. Weil L_1 und L_2 aus endlich vielen zyklischen Teilkörpern über k zusammengesetzt sind, so müssen die Körper L_1 und L_2 übereinstimmen, w. z. b. w.

Mit Hilfe der Satze 3 und 4 beweist man ohne Schwierigkeit folgenden

Hilfssatz 3. Es sei L ein abelscher Klassenkörper über k. Ist dann H eine $H(L,k)$ enthaltende Untergruppe in A, so gibt es in L genau einen abelschen Klassenkörper über k, dessen Normgruppe gleich H ist.

Satz 5. *Sind L_1 und L_2 abelsche Klassenkörper über k, so ist das Kompositum L_1L_2 der abelsche Klassenkörper über k, dessen Normgruppe $H(L_1, k) \frown H(L_2, k)$ ist. Ebenso ist $L_1 \frown L_2$ der abelsche Klassenkörper über k, dessen Normgruppe $H(L_1, k) \cdot H(L_2, k)$ ist.*

Beweis. Da L_1L_2 über k abelsch ist, so ist es ein Klassenkörper über k. Offenbar gilt dann:

$$H(L_1L_2, k) \leqq H(L_i, k) \quad (i=1, 2);$$

d. h. es ist $H(L_1L_2, k) \leqq H(L_1, k) \frown H(L_2, k)$.

Nach Hilfssatz 3 existiert in L_1L_2 ein abelscher Teilkörper über k, dessen Normgruppe gleich $H(L_1, k) \frown H(L_2, k)$ ist. Ferner enthält dieser Körper L_1, L_2 und infolgedessen das Kompositum L_1L_2; es muß daher $H(L_1L_2, k)=H(L_1, k) \frown H(L_2, k)$ sein.

Der Körper $L_1 \frown L_2$ ist offenbar ein abelscher Klassenkörper über k, und es gilt:

$$H(L_1 \frown L_2, k) \geqq H(L_1, k) \cdot H(L_2, k).$$

Nach Hilfssatz 3 existiert in L_1 und L_2 nur ein abelscher Teilkörper, dessen Normgruppe gleich $H(L_1, k) \cdot H(L_2, k)$ ist; dieser Körper muß also in $L_1 \frown L_2$ enthalten sein. Es folgt daher:

$$H(L_1 \frown L_2, k)=H(L_1, k) \cdot H(L_2, k).$$