9. *Algebrenklassengruppen über diskret perfekten Körpern.*

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1942.)

In der vorliegenden Note bezeichnet k durchweg einen *diskret perfekten Körper* in bezug auf eine Exponentenbewertung, und $\mathfrak{p}$ den zu dieser Bewertung gehörigen Primdivisor aus k. Der Restklassenkörper $\mathfrak{k}=k/\mathfrak{p}$ besitzt ferner die folgenden Beschaffenheiten:

1) $\mathfrak{k}$ *ist vollkommen,*
2) *zu einer beliebigen natürlichen Zahl n existiert genau eine algebraische Erweiterung vom Grade n über* $\mathfrak{k}$.

Ist dann D eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über k, so gilt, wie ich schon an anderer Stelle gezeigt habe, stets:

$$D \sim (\pi^{\nu}, W, S)^{1)}.$$

Dabei bedeutet π ein beliebig fest gewähltes Primelement von $\mathfrak{p}$ aus k, W eine separable zyklische unverzweigte Erweiterung vom Grade n über k[2], und S einen erzeugenden Automorphismus von W über k.

1. Unter Benutzung aller obigen Bezeichnungen beweisen wir zunächst folgenden

Hilfssatz 1. Gilt für eine normale Divisionsalgebra D über k

$$D \sim (\pi^{\nu}, W, S),$$

so ist D dann und nur dann vom Grade n über k, wenn ν zu n prim ist.

Beweis. Es sei D normal vom Grade n über k. Setzt man dann $d=(n, \nu)$ und $n_0=\frac{n}{d}$, so ist $K=k(\sqrt[n_0]{\pi})$ voll-verzweigt vom Grade n_0 über k, weil offenbar $x^{n_0}-\pi$ in $k[x]$ irreduzibel ist. Durch die Koeffizientenkörpererweiterung erhält man:

$$D_K \sim (\pi^{\nu}, W^K, S_K)^{3)}.$$

Dabei bedeutet W^K wie üblich die Erweiterung KW über K als Grundkörper, und S_K die früheste Potenz von S, welche der Galoisgruppe von KW über K angehört. Da K über k voll-verzweigt, aber W über k unverzweigt ist, so ist $W \frown K=k$, also ist W^K separabel zyklisch unverzweigt vom Grade n über K. Da in K

1) M. Moriya, Struktur der Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern, Proc. **18** (1942), 5.

2) Hier verabreden wir, daß die im folgenden vorkommenden Körper über k alle in einem fest gewählten algebraisch-abgeschlossenen Körper über k enthalten sind. Es ist daher die Kompositumbildung von endlich vielen Körpern über k stets möglich.

3) Vgl. hierzu etwa M. Deuring, Algebren, Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete, **4** (1935), S. 66.

$$\pi^\nu = (\sqrt[n_0]{\pi})^{n_0 d \frac{\nu}{d}} = (\sqrt[n_0]{\pi})^{n \frac{\nu}{d}}$$

ist, so ist π^ν die n-te Potenz eines Elementes aus K; d. h. $D_K \sim (\pi^\nu, W^K, S_K) \sim K$. Der Körper K ist also ein Zerfällungskörper von D über k; nach der allgemeinen Theorie muß n_0 durch n teilbar sein. Hieraus folgt sofort: $1 = d = (n, \nu)$.

Die zyklische Algebra (π^ν, W, S) ist nach der allgemeinen Theorie eine normale einfache Algebra vom Grade n über k, also ist ihr *Exponent* l ein Teiler von n. Da aber $(\pi^\nu, W, S)^l \sim (\pi^{\nu l}, W, S) \sim k$ ist, so muß $l\nu$ durch n teilbar sein[1]. Wenn also $(n, \nu) = 1$ ist, so folgt $n \mid l$; d. h. es ist $n = l$. Bezeichnet nur r den *Index* von (π^ν, W, S), so ist $r = n$, weil $n \geqq r \geqq l$ und $n = l$ ist. Die Algebra (π^ν, W, S), also auch D selbst, ist eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über k, wenn $(n, \nu) = 1$ ist.

Zusatz. Der Exponent einer normalen Divisionsalgebra über k ist stets gleich ihrem Index.

Satz 1. *Ist D eine normale Divisionsalgebra vom Grade n über k, so ist eine endliche separable Erweiterung K über k dann und nur dann ein Zerfällungskörper von D, wenn*

$$n \mid (K:k)$$

ist.

Den Beweis dieses Satzes kann man genau so durchführen wie für die Divisionsalgebren mit $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpern als Zentrum[2].

Mit Hilfe der beiden obigen Hilfssätze kann man ohne Schwierigkeit die folgenden Sätze beweisen:

Satz 2. *Für eine beliebige natürliche Zahl n ist jede normale einfache Algebra vom Grade n über k zu einer zyklischen Algebra von der Form (π^ν, W, S) ähnlich. Dabei ist π ein fest gewähltes Primelement von $\mathfrak{p}$, W eine separable zyklische unverzweigte Erweiterung vom Grade n über k, S ein erzeugender Automorphismus von W über k. Ist dann der Index dieser einfachen Algebra gleich r, so ist stets*

$$(\nu, n) = \frac{n}{r}.$$

Satz 3. *Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann bilden die Algebrenklassen mit k als Zentrum, deren Indizes Teiler von n sind, eine zyklische Gruppe von der Ordnung n. Dabei ist jede Algebrenklasse durch eine zyklische Algebra (π^ν, W, S) $(0 \leqq \nu \leqq n-1)$ repräsentiert.*

---

1) M. Moriya, loc. cit.

2) C. Chevalley, La théorie du symbole de restes normiques, Crell's Journ., **169** (1933), S. 142.