29. Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. III.

Von Tadasi NAKAYAMA
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universitat zu Nagoya.
Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1943.)

Anschließend an die vorangehende Note[1] beweisen wir in der vorliegenden den *Existenzsatz* der Klassenkörper über einem diskret perfekten Körper k, welcher wieder die im Anfang der vorangehende Note aufgestellten Eigenschaften besitzt.

1. Wir betrachten zunächst über k alle endlichen separablen *abelschen* Erweiterungen und bezeichnen das Kompositum aller solchen Erweitungen durch L. Bekanntlich ist L eine separable abelsche Erweiterung über k, und jeder endliche Teilkörper von L/k (d. h. ein Teilkörper von L, dessen Grad nach k endlich ist) ist stets über k abelsch. Nun ordnen wir einem beliebigen endlichen Teilkörper K_α von L/k ein Element a_α aus k durch die folgende Vorschrift zu:

Ist $K_\alpha \subset K_\beta \subset L$, so ist stets

$$(a_\beta, K_\beta/k) \rightarrow (a_\alpha, K_\alpha/k) ;$$

d. h. der durch das Normenrestsymbol $(a_\beta, K_\beta/k)$ bestimmte Automorphismus von K_β/k induziert den durch $(a_\alpha, K_\alpha/k)$ definierten Automorphismus von K_α/k[2]. Wir bezeichnen nun das aus den eben angegebenen Elementen a_α entstehende System $\{a_\alpha\}$ durch $\mathfrak{a}$ und nennen a_α die K_α-Komponente von $\mathfrak{a}$. Ferner bezeichnen wir die Gesamtheit aller $\mathfrak{a}=\{a_\alpha\}$ mit $\mathfrak{A}$.

Die Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{A}$ heißen einander gleich, wenn in jedem endlichen Teilkörper K_α von L/k durch die K_α-Komponente a_α von $\mathfrak{a}$ und b_α von $\mathfrak{b}$ stets ein und dasselbe Normenrestsymbol definiert wird:

$$(a_\alpha, K_\alpha/k) = (b_\alpha, K_\alpha/k) .$$

Gemäß einer Eigenschaft der Normenrestsymbole gehört $\{a_\alpha b_\alpha\}$ auch zu $\mathfrak{A}$, wenn K_α alle endlichen Teilkörper von L/k durchläuft. Wir definieren daher $\{a_\alpha b_\alpha\}$ als das Produkt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ und bezeichnen es mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Offenbar bildet $\mathfrak{A}$ eine multiplikative abelsche Gruppe.

Wenn insbesondere zu einem Element $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ ein solches Element a aus k existiert, daß für jeden endlichen Teilkörper K_α von L/k stets $(a_\alpha, K_\alpha/k) = (a, K_\alpha/k)$ gilt, so bezeichnen wir $\mathfrak{a}$ auch schlechthin mit a. Selbstverständlich können dabei verschiedene Elemente aus k als Elemente aus $\mathfrak{A}$ gleich sein. Bezeichnet man nun mit N den Durchschnitt der Normgruppen $H(K_\alpha, k)$ aller endlichen Teilkörper K_α von

1), 2) T. Nakayama und M. Moriya, Zur Theorie der Normenrestsymbole über diskret perfekten Körpern.

L/k, so sind die Elemente aus einer Restklasse der Gruppe A aller von Null verschiedenen Elemente aus k nach N in $\mathfrak{A}$ einander gleich, aber je zwei Elemente aus den verschiedenen Restklassen nach N sind in $\mathfrak{A}$ stets verschieden. Wenn man also in einer Untergruppe H aus A die Gleichheit zwischen den Elementen wie oben definiert, so entsteht aus H eine Untergruppe H^* von $\mathfrak{A}$. Die Gruppe, welche aus A auf obige Weise entsteht, bezeichnen wir im weiteren stets durch A^*.

2. Einführung der Topologie in $\mathfrak{A}$ und A.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Element aus $\mathfrak{A}$. Ist dann K_α ein beliebiger endlicher Teilkörper von L/k, so nennen wir die Gesamtheit $U(\mathfrak{a}, K_\alpha)$ aller Elemente aus $\mathfrak{A}$, deren K_α-Komponenten mit der K_α-Komponente a_α von $\mathfrak{a}$ zusammen ein und dasselbe Normenrestsymbol $(a_\alpha, K_\alpha/k)$ definieren, eine *Umgebung* von $\mathfrak{a}$.

Ist nun K_β ein K_α enthaltender, endlicher Teilkörper von L/k, so schließt man leicht aus einer Eigenschaft der Normenrestsymbole, daß die Umgebung $U(\mathfrak{a}, K_\beta)$ von $\mathfrak{a}$ stets in $U(\mathfrak{a}, K_\alpha)$ enthalten ist. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ ein *Hausdorffscher* Raum ist, und sogar hinsichtlich der eben eingeführten Topologie eine *topologische Gruppe* bildet.

Nun definieren wir für ein Element $\mathfrak{a}=\{a_\alpha\}$ aus $\mathfrak{A}$ eine Abbildung χ auf folgende Weise:

$$\chi(\mathfrak{a})=\{(a, K_\alpha/k)\}\,.$$

Da $(a_\alpha, K_\alpha/k)$ ein Automorphismus von K_α/k ist und für einen K_α enthaltenden endlichen Teilkörper K_β stets $(a_\beta, K_\beta/k)\rightarrow(a_\alpha, K_\alpha/k)$ ist, so definiert $\chi(\mathfrak{a})$ eindeutig einen Automorphismus von L/k, wenn man auf jeden endlichen Teilkörper K_α von L/k den Automorphismus $(a_\alpha, K_\alpha/k)$ anwendet. Ist umgekehrt G ein Automorphismus von L/k, so kann man stets ein einziges Element $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ derart bestimmen, daß $\chi(\mathfrak{a})=G$ ist. Nach W. Krull ist die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L/k ein *bikompakter Hausdorffscher* Raum[1]. Die Abbildung χ bildet die Gruppe $\mathfrak{A}$, wie leicht bestätigt wird, homöomorph auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ ab.

Nun kann man die Gruppe A^* als einen relativen Raum von $\mathfrak{A}$ in üblicher Weise topologisieren. Auf Grund der Topologie von A^* kann man in A auch die Topologie auf folgende Weise einführen: Ist a ein Element aus A und U^* eine Umgebung von a aus dem topologischen Raum A^*, so definieren wir die Gesamtheit aller im Komplex U^*N liegenden Elemente als eine Umgebung von a in A. Dadurch wird die Gruppe A, wie leicht bestätigt wird, eine *allgemein-topologische* Gruppe[2]. Eine Teilmenge M aus der allgemein-topologischen Gruppe A heißt dann und nur dann *abgeschlossen* bzw. *offen*, wenn M die Gruppe N enthält und die aus M entstehende Menge M^* von A^* in A^* abgeschlossen bzw. offen ist.

Satz 1. *Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe von A mit einem endlichen Index, und H^* die aus H entstehende Untergruppe*

1) W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Ann., Bd. **100** (1928), S. 690.

2) K. Kodaira, Über die Beziehung zwischen den Maßen und den Topogien in einer Gruppe, Proc. Phys.-Math. Soci., Japan, Bd. **23** (1941), 75-77.

aus A^*. *Bezeichnet man dann mit* $\bar{H}^*$ *die abgeschlossene Hülle von* H^* *in* $\mathfrak{A}$, *so gilt:*

$$\mathfrak{A}/\bar{H}^* \cong A/H.$$

Beweis. Es seien $Ha_1, \dots, Ha_n$ die sämtlichen verschiednen Restklassen von A nach H. Dann folgt aus der Gleichung $A^* = H^*a_1 \cup H^*a_2 \cup \cdots \cup H^*a_n$:

$$\mathfrak{A} = \bar{H}^*a_1 \cup \bar{H}^*a_2 \cup \cdots \cup \bar{H}^*a_n = \bar{H}^*A^*$$

weil A^* in $\mathfrak{A}$ dicht ist. Dabei bezeichnen $\bar{H}^*a_1 \dots, \bar{H}^*a_n$ bzw. die abgeschlossenen Hüllen von $H^*a_1, \dots, H^*a_n$ hinsichtlich der Topologie von $\mathfrak{A}$. Aus einem bekannten Isomorphiesatz folgt nun:

$$\mathfrak{A}/\bar{H}^* \cong A^*/(\bar{H}^* \frown A^*) = A^*/H^* \cong A/H,$$

weil H in A abgeschlossen ist.

Satz 2. *Ist K eine endliche separable abelsche Erweiterung über k, so ist die K zugeordnete Normgruppe in A abgeschlossen.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß $H(K, k) \supseteqq N$ ist. Nun ist die K zugeordnete Untergruppe $\mathfrak{H}$ aus der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L/k normal abgeschlossen, und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ bekanntlich mit der Galoisgruppe von K/k isomorph. Bezeichnet man mit $\mathfrak{H}$ das Urbild von $\mathfrak{H}$ durch die homöomorphe Abbildung χ, so ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}$ abgeschlossen. Da für ein beliebiges Element h aus $H(K, k)$ stets $(h, K/a) = 1$ gilt, so ist $H^* \subseteqq \mathfrak{H}$, wo H^* die aus $H(K, k)$ entstehende Untergruppe von A^* bezeichnet. Ist nun $\mathfrak{h}$ ein Element aus $\mathfrak{H}$ und h die K-Komponente von h, so ist offenbar $(h, K/k) = 1$; also ist $\mathfrak{H} \frown A^* \subseteqq H^*$. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$H^* = \mathfrak{H} \frown A^*;$$

d.h. H^* ist abgeschlossen in A^*. Nach Definition ist daher $H(K, k)$ in A abgeschlossen.

Jetzt sind wir imstande, den Existenzsatz zu beweisen:

Satz 3. Existenzsatz. *Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe von einem endlichen Index aus A. Dann existiert ein Klassenkörper zu H über k.*

Beweis. Wir bilden zunächst in $\mathfrak{A}$ die abgeschlossene Hülle $\bar{H}^*$ der aus H entstehenden Untergruppe H^* von A^*, und bilden durch die homöomorphe Abbildung χ die Gruppe $\bar{H}^*$ auf eine abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{H}$ aus der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L/k ab. Nach dem galoisschen Hauptsatz existiert der $\mathfrak{H}$ zugeordnete Körper K[1], und die Galoisgruppe $\mathfrak{G}_0$ von K/k ist isomorph zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Wegen der Relation $\mathfrak{A}/\bar{H}^* \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ gilt: $\mathfrak{A}/\bar{H}^* \cong \mathfrak{G}_0$. Da H^* in $\bar{H}^*$ enthalten ist, so gilt für jedes Element h aus H stets: $(h, K/k) = 1$. H ist also in der Normgruppe $H(K, k)$ enthalten. Nach Satz 1 besteht aber: $\mathfrak{A}/\bar{H}^* \cong A/H$; weil anderseits nach dem Isomorphiesatz[2] $\mathfrak{A}/\bar{H}^* \cong G_0 \cong A/H(K, k)$ ist,

1) W. Krull, loc. cit., S. 690–691.

2) M. Moriya, Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. II. Proc. **18** (1942), 456–458.

so muß H mit $H(K, k)$ übereinstimmen, w. z. b. w.

3. Bezeichnet nun k insbesondere einen Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper, so ist wohl bekannt, daß zu jeder Untergruppe H von einem endlichen Index aus A stets ein Klassenkörper über k existiert. Dieser Existenzsatz ist aber auf einen Spezialfall zurückgeführt, wo A/H zyklisch von einem Primzahlpotenzgrad ist. Denn eine Untergruppe von einem endlichen Index aus A ist stets als der Durchschnitt von endlich vielen Untergruppen darstellbar, nach denen A zyklische Faktorgruppen von Primzahlpotenzgraden bildet. Wir nehmen also an, daß A/H zyklisch von einem Primzahlpotenzgrad l^ν ist. Die Existenz des Klassenkörpers zu H wird aber dann mit Hilfe der vollständigen Induktion nachgewiesen, wenn der Existenzsatz für die Untergruppen vom Index l bewiesen wird. Ist nämlich H_0 eine Untergruppe vom Index l aus A und K_0 der Klassenkörper zu H_0, so betrachten wir in K_0 die Gesamtheit H_1 aller derjenigen Elemente, deren Normen nach k in H hineinfallen. Bezeichnet man nun mit A_0 die Menge aller von Null verschiedenen Elemente aus K_0, so ist

$$(A_0 : H_1) = (H_0 : H)\,,$$

also ist $(A_0 : H_1) = l^{\nu-1}$. Wenn man daher die Existenz des Klassenkörpers K zu H_1 über K_0 voraussetzt, so ist K der Klassenkörper zu H. Denn die Normgruppe $H(K, k)$ ist offenbar in H enthalten, also muß $\big(A : H(K, k)\big) \geqq (A : H) = l^\nu = (K : k)$ sein; da anderseits nach dem Abgrenzungssatz[1] stets $\big(A : H(K, k)\big) \leqq (K : k)$ ist, so ist unbedingt $H(K, k) = H$. Es genügt also, für eine beliebige Untergruppe H vom Primzahlindex l aus A die Existenz des Klassenkörpers zu H zu beweisen. Dazu beweisen wir zuerst folgenden allgemeinen Satz:

Satz 4. *E sei l eine von der Charakteristik von k*[2] *verschiedene Primzahl. Bezeichnet dann A die Gesamtheit aller l-ten Potenzen der Elemente aus A, so ist A^l in A abgeschlossen.*

Beweis. Ist Z eine beliebige separable zyklische Erweiterung vom Grade l über k, so ist stets $A^l \leqq H(Z, k)$, also ist A^l im Durchschnitt der Normgruppen aller separablen zyklischen Erweiterung vom Grade l über k enthalten.

Nun betrachten wir den Fall, wo k die primitiven l-ten Einheitswurzeln enthält. Ist dann a ein in A^l nicht liegenden Element aus A, so ist $k(\sqrt[l]{a})$ zyklisch vom Grade l über k. Es gibt also ein Element b aus A derart, daß $\big(b, k(\sqrt[l]{a})\big)$ kein identischer Automotphismus von $k(\sqrt[l]{a})/k$ ist. Für dieses b gilt nach Definition des Hilbertschen Normenrestsymboles[3]: $(b, a) \neq 1$. Nach dem Reziprozitätsgesetz ist dann

$$(a, b) \neq 1\,;$$

1) M. Moriya, Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. II. Proc. **18** (1942), 456–458.

2) k braucht hierbei nicht notwendig $\mathfrak{p}$-adischer Körper zu sein, sondern kann ein bisher betrachteter diskret perfekter Körper sein.

3) Vgl. die vorangehende Note.

d. h. a ist keine Norm der Elemente aus $k(\sqrt[l]{b})$ nach k. Somit ist bewiesen, daß A^l mit dem Durchschnitt der Normgruppen aller separablen zyklischen Erweiterungen vom Grade l über k übereinstimmt.

Wenn aber k keine primitive l-te Einheitswurzel enthält, so adjungieren wir zu k eine primitive l-te Einheitswurzel ζ. Dann ist der Grad m von $k(\zeta)=k_0$ nach k eine Teiler von $l-1$. Ist a kein Element aus A^l, so ist es auch a^{l-1}. Ferner ist a^{l-1} keine l-te Potenz aus dem Körper k_0. Denn sonst müßte das irreduzible Polynom x^l-a^{l-1} aus $k[x]$ in $k(\zeta)$ eine Nullstelle besitzen, was aber ein Widerspruch ist. Es gibt also nach dem oben Gezeigten ein Element b aus k_0 derart, daß a^{l-1} keine Norm der Elemente aus $k_0(\sqrt[l]{b})$ nach k_0 ist. Wir bezeichnen nun mit $b=b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ die sämtlichen verschiedenen Elemente unter den zu b konjungierten Elementen über k. Dann ist das Polynom $F(x) = \prod_{i=1}^{s}(x^l-b^{(i)})$ irreduzibel in $k[x]$, und die Körper $k_0(\sqrt[l]{b^{(1)}}), \dots, k_0(\sqrt[l]{b^{(s)}})$ sind alle über k_0 zyklisch vom Grade l. Bezeichnet nun $\mathfrak{G}$ die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers K von $F(x)$ über k und $\mathfrak{H}$ die k_0 zugeordnete Untergruppe aus $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{H}$ offenbar abelsch vom Typus $(l, \cdots, l)$. Da a^{l-1} keine Norm der Elemente aus $k_0(\sqrt[l]{b})$ nach k_0 ist, so gehört a^{l-1} nicht zu $H(K, k_0)$; hieraus schließt man, daß a^{l-1} auch kein Element aus $H(K, k)$ ist. Denn wäre $a^{l-1}=N_{Kk}(\bar{a})$ für ein Element $\bar{a}$ aus K, so würde $a^{l-1}=N_{Kk_0}(\bar{a}^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{m-1}})$ sein, wo σ ein erzeugender Automorphismus von k_0/k ist; dies ist aber ein Widerspruch, weil wie schon oben bemerkt, a^{l-1} kein Element aus $H(K, k_0)$ ist.

Da offenbar a^{l-1} zu $H(k_0, k)$ gehört, so ist $H(K, k)$ eine echte Untergruppe von $H(k_0, k)$. Daher ist der Index $\big(A : H(K, k)\big)$ durch l teilbar. Wegen des Abgrenzungssatzes ist der Grad des maximalen abelschen Teilkörpers L von K/k nach k durch l teilbar. Die Galoisgruppe von L über k ist also das direkte Produkt einer abelschen Gruppe $\mathfrak{H}_0$ von der Ordnung l^ν $(\nu \geqq 1)$ mit der Galoisgruppe von k_0 über k. Ferner existiert in L ein abelscher Teilkörper L_0 über k, dessen Galoisgruppe mit $\mathfrak{H}_0$ isomorph ist. Da offenbar $\mathfrak{H}_0$ mit einer Untergruppe von $\mathfrak{H}$ isomorph ist, so ist $\mathfrak{H}_0$ auch vom Typus $(l, \dots, l)$ und infolgedessen ist L_0 das Kompositum von endlich vielen zyklischen Erweiterungen vom Grade l über k. Wegen der Gleichung $H(K, k)= H(L, k)=H(L_0, k) \cap H(k_0, k)$ und $a^{l-1} \in H(k_0, k)$ folgt ohne weiteres:

$$a^{l-1} \bar{\in} H(L_0, k).$$

Es existiert daher über k eine zyklische Erweiterung Z vom Grade l von der Art, daß a^{l-1} nicht zu $H(Z, k)$ gehört. Hieraus folgt sofort, daß a kein Element aus $H(Z, k)$ ist. Somit ist wieder gezeigt, daß A^l der Durchschnitt der Normgruppen aller separablen zyklischen Erweiterungen vom Grade l über k ist. Weil nach Satz 2 jede Normgruppe in k stets in A abgeschlossen ist, so ist A^l als der Durchschnitt der abgeschlossenen Untergruppen auch in A abgeschlossen.

Satz 5. *Es sei k ein diskret perfekter Körper mit einem endlichen Körper als dem Restklassenkörper. Ist dann l eine zur Charakteristik* *von k prime Primzahl, so ist jede Untergruppe vom Index l aus der Gruppe A stets in A abgeschlossen.*

Beweis. Bezeichnet π ein Primelement aus k, so existiert bekanntlich ein Exponent e derart, daß jede Einseinheit, welche mod π^e zu 1 kongruent ist, stets zu A gehört. Legt man ein vollständiges Restsystem S aus k zugrunde, so existieren endlich viele Elemente von der Form $\varepsilon_0+\varepsilon_1\pi+\cdots+\varepsilon_{e-1}\pi^{e-1}$ aus k, wo $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{e-1}$ alle aus S herausgegriffen sind. Mithin ist der Index $(A:A^l)$ endlich. Ist H eine Untergruppe vom Index l aus A, so ist H die Vereinigung der endlich vielen Restklassen von A nach A^l; weil eine solche Restklasse stets in A abgeschlossen ist, so ist es auch H.

Ist insbesondere k ein Henselscher $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, so sind die Bedingungen von Satz 5 sicher erfüllt. Es existiert also nach den Sätzen 5 und 3 zu jeder Untergruppe vom Index l aus einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper stets ein Klassenkörper.

Bemerkung. Wenn $(A:A^l)$ nicht endlich ist, so ist für die Existenz des Klassenkörpers zu einer Untergruppe H vom Primzahlindex l aus A die Bedingung unentbehrlich, daß *H in A abgeschlossen* ist, wie wir später zeigen werden.