37. Über das Helmholtzsche Raumproblem.

Von Shôkichi IYANAGA und Makoto ABE.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1943.)

Von Helmholtz stammt der naturgemässe Gedanke, den Euklidischen Raum durch seine „freie Beweglichkeit" zu charakterisieren[1]. S. Lie hat dieser Idee eine mathematisch präzise Formulierung gegeben, und das wichtige Problem behandelt, alle Transformationsgruppen des n-dimensionalen Raumes zu bestimmen, die die Forderung der freien Beweglichkeit (Forderung I des Satzes w. u.) erfüllen[2]. Für kontinuierliche Transformationsgruppen ist dieses Problem von Lie vollständig gelöst worden, dessen Beweis von H. Weyl weiter vereinfacht worden ist[3]. Wie Weyl gezeigt hat, liegt der Kern des Problems darin, die der Forderung I genügende Untergruppe der Gruppe aller affinen Transformationen als mit der Euklidischen Bewegungsgruppe identisch zu erweisen. Weyl tut dies, indem er die Analytizität der in Frage stehenden Untergruppe voraussetzt, und darauf die Methoden der Lieschen Theorie anwendet. Im folgenden soll gezeigt werden, dass man ohne Annahme der Analytizität und mit elementaren Mitteln auskommt, wenn man der betreffenden Untergruppe ausser der Forderung I noch eine weitere Forderung für die Teilräume (Forderung II des Satzes), die uns als eine auch ganz naturgemässe erscheint, auferlegt (§ 1). In § 2 wird dann bewiesen, dass im analytischen Fall die hinzugefügte Forderung II eine Folge der ursprünglichen I ist, womit also ein neuer Beweis für den Weylschen Satz geliefert wird. Es wird schliesslich bemerkt, dass man bei diesem Schluss wenigstens im 2-dimensionalen Fall auch die Stetigkeitsforderung fallen lassen kann.

§ 1. Es sei K ein geordneter Körper, $R=R^n(K)$ der n-dimensionale affine Raum über K. Ein r-dimensionaler linearer Teilraum a_r $(1\leqq r\leqq n)$ von R ist durch einen a_{r-1}, welche in a_r liegt, in zwei Halbräumen a'_r und a''_r zerlegt. Wir nennen nun eine „*Kette von Halbräumen in R*" eine solche Reihe A inzidenter Halbräume der Dimensionen von n bis hinab zu 0

$$A: \qquad a'_n \supset a'_{n-1} \supset \cdots \supset a'_1 \supset a_0 , \qquad a_n = R ,$$

dass jedes a'_r $(1\leqq r\leqq n)$ einer der zwei Hälbräume ist, in die a_r durch das nächstfolgende a_{r-1} zerlegt wird.

Nun sei $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^n(K)$ die Gruppe aller affinen Transformationen von R. Unser Ziel ist der folgende

Satz. Eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ erfülle die folgenden Forderungen:

---

1) H. v. Helmholtz: Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1868.

2) S. Lie: Ges. Abhandlungen, II-1, S. 374-480.

3) H. Weyl: Math. Analyse des Raumproblems, S. 29-43. Vgl. insb. Satz T_n.

I. (*Die Forderung der freien Beweglichkeit.*) *Für je zwei Ketten von Teilräumen in* R:

$$A: \qquad \alpha'_n \supset \alpha'_{n-1} \supset \cdots \supset \alpha'_1 \supset \alpha_0,$$
$$B: \qquad \beta'_n \supset \beta'_{n-1} \supset \cdots \supset \beta'_1 \supset \beta_0$$

gibt es eine und nur eine Transformation T *aus* $\mathfrak{G}$, *welche* A *in* B *überführt, d. h.*

$$T(\alpha'_n) = \beta'_n, \ldots, \quad T(\alpha'_1) = \beta'_1, \quad T(\alpha_0) = \beta_0.$$

II. (*Die Forderung der freien Beweglichkeit für Teilräume.*) *Die Transformationen aus* $\mathfrak{G}$, *die einen bestimmten Teilraum* α_r *invariant lassen, induzieren in* α_r *affine Transformationen dieses Raumes, welche zusammen eine Gruppe* $\mathfrak{G}(\alpha_r)$ *bilden. Für je zwei Ketten von Halbräumen* A_r, B_r *in* α_r *soll es nun eine und nur eine Transformation aus* $\mathfrak{G}(\alpha_r)$ *geben, welche* A_r *in* B_r *überführt.* —

Der Körper K *sei ferner als Pythagoreisch vorausgesetzt:* K *enthalte mit* a *und* b *stets auch* $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dann ist $\mathfrak{G}$ *die Gruppe aller derjenigen affinen Transformationen, die den „Abstand" je zweier Punkte* P, Q, *d. h. eine bestimmte positiv-definite quadratische Form in den Koordinatendifferenzen von* P *und* Q, *invariant lassen.*

Der Beweis ist in mehrere Schritte eingeteilt.

1) *Spiegelung an* α_r. Es sei

$$A: \qquad \alpha'_n \supset \alpha'_{n-1} \supset \cdots \supset \alpha'_1 \supset \alpha_0$$

eine Kette von Halbräumen in R; ein (affines) Koordinatensystem $(O \mid P_1, P_2, \ldots, P_n)$ von R heisse „*der Kette A zugehörig*", wenn $O = \alpha_0$ ist und jedes P_r $(1 \leqq r \leqq n)$ dem Halbraum α'_r (aber nicht zu α'_{r-1}) gehört.

Es gibt nun für

$$\left.\begin{aligned} A:&\quad \alpha'_n \supset \cdots \supset \alpha'_{r+1} \supset \alpha'_r \supset \alpha'_{r-1} \supset \cdots \supset \alpha_0, \\ A^{(r)}:&\quad \alpha''_n \supset \cdots \supset \alpha''_{r+1} \supset \alpha'_r \supset \alpha'_{r-1} \supset \cdots \supset \alpha_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\alpha'_{r+i} \vee \alpha''_{r+i} = \alpha_{r+i}; \\ &i = 1, \ldots, n-r)^{4)} \end{aligned}$$

eine Transformation S aus $\mathfrak{G}$, welche A in $A^{(r)}$ überführt. Diese lässt nach II jeden Punkt von α_r invariant. In bezug auf ein Koordinatensystem, das der Kette A zugehört, nimmt die Matrix dieser Transformation folgende Gestalt an[5]:

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} E_r & & * & \\ \hline & a_{r+1} & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & a_n \end{array}\right), \qquad \begin{aligned} E_r:&\ \text{die } r\text{-reihige Einheitsmatrix,} \\ &\ a_{r+1}, \ldots, a_n < 0. \end{aligned}$$

4) Hier bedeutet $\vee$ mengentheoretische Summe.

5) Hier wie im folgenden werden oft die Transformation und deren Matrix mit demselben Buchstaben bezeichnet.

Da offenbar S^2 die Kette A invariant lässt, muss $S^2=E$ sein. Daraus folgt zunächst $a_{r+1}=\cdots=a_n=-1$, und dann nach einer leichten Überlegung, dass S folgende Gestalt hat:

$$S=\begin{pmatrix} E_r & * \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

S führt also jede Kette

$$B: \qquad \beta'_n \supset \cdots \supset \beta'_{r+1} \supset \beta'_r \supset \beta'_{r-1} \supset \cdots \supset \beta_0$$

mit $\beta_r=\alpha_r$ in die Kette

$$B^{(r)}: \qquad \beta''_n \supset \cdots \supset \beta''_{r+1} \supset \beta'_r \supset \beta'_{r-1} \supset \cdots \supset \beta_0$$

$$(\beta'_{r+i} \vee \beta''_{r+i}=\beta_{r+i}\,;\ i=1, \ldots, n-r)$$

über. S lässt sich also statt durch A und $A^{(r)}$ auch mittels B und $B^{(r)}$ definieren; m. a. W. ist S durch α_r allein bestimmt. Diese Transformation $S=S_{\alpha_r}$ heisse die *Spiegelung (von R) am Teilraum* α_r. Insbesondere ist die Spiegelung S_O am Punkt O mit der affin-geometrischen Spiegelung: $P \to P'$ mit $\overrightarrow{OP'}=-\overrightarrow{OP}$ identisch, denn sie hat ja die Matrix $-E$, sobald man O als Koordinatenanfangspunkt wählt.

2) *Jede Translation gehört zu* $\mathfrak{G}$. Es seien P, Q beliebige zwei Punkte, M ihr Mittelpunkt. Dann ist $T=S_M S_P$ die Translation, die P in Q überführt. Sie gehört mit S_M und S_P zu $\mathfrak{G}$.

3) *Länge der Strecke.* Zwei Figuren, die mittels Transformationen von $\mathfrak{G}$ aufeinander abbilden lassen, mögen *kongruent* heissen. (In Zeichen: $\equiv$). Die *Strecke* ist die Figur, die aus einem geordneten Punktepaar AB besteht. Nach 2) folgt $AB \equiv A'B'$ aus der Vektorgleichheit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. Es gilt auch $AB \equiv BA$. (Spiegelung am Mittelpunkt!) Nun sei α'_1 eine Halbgerade, die von einem Punkt O ausgeht. Aus I und II folgt: *Jede Strecke AB lässt sich in eindeutig bestimmter Weise auf* α'_1 *abtragen*; d. h. es gibt einen und nur einen Punkt P auf α'_1, sodass, $OP \equiv AB$ ist. Auf α'_1 sei nun ein- für allemal eine „Einheitsstrecke" OE festgelegt. Das Verhältniss $\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OE}=|AB|$ (ein nicht-negatives Element aus K) nennen wir die „*Länge*" der Strecke AB. Zwei Strecken sind dann und nur dann kongruent, wenn sie gleiche Länge haben; insbesondere kann man von der Länge eines Vektors $|\mathfrak{a}|$ reden. Ferner sieht man leicht ein, dass die Länge der Strecke bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, wie man auch die Einheitsstrecke wählt.

4) *Winkel.* Ein geordnetes Paar von Halbgeraden α'_1, β'_1, welche von einem und demselben Punkt O ausgehen, heisst *Winkel* $\sphericalangle(\alpha'_1, \beta'_1)$. (Man lässt im folgenden evtl. die Dimensionsindizes 1 von α'_1, β'_1 usw. fallen.) O ist der „Scheitel" des Winkels; zwei „Schenkel" α'_1, β'_1 bestimmen eine Ebene α_2, die „Ebene des Winkels".

Die Kongruenz $\sphericalangle(\alpha'\beta') \equiv \sphericalangle(\beta'\alpha')$ ist nicht offensichtlich, wie

$AB \equiv BA$ im Fall der Strecken es war[6]. Jedenfalls folgt aber aus $\sphericalangle(\alpha'\beta') \equiv \sphericalangle(\gamma'\delta')$ $\sphericalangle(\beta'\alpha') \equiv \sphericalangle(\delta'\gamma')$. Es gilt auch die „Kongruenz der Scheitelwinkel": $\sphericalangle(\alpha'\beta') \equiv \sphericalangle(\alpha''\beta'')$ (Spiegelung am Scheitel!) Der Winkel $\sphericalangle(\alpha''\beta')$ heisst „*Nebenwinkel*" von $\sphericalangle(\alpha'\beta')$. Kongruente Winkel haben offenbar kongruente Nebenwinkel. Schliesslich kann nach I und II *jeder Winkel an einer gegebenen Halbgerade α_1' in eine gegebene Halbebene α_2' in eindeutiger Weise abgetragen werden*, d. h. es gibt eine und nur eine Halbgerade β_1' in α_2', welche vom Ausgangspunkt von α_1' ausgeht, sodass $\sphericalangle(\alpha_1', \beta_1')$ dem gegebenen Winkel kongruent ist.

5) *Rechte Winkel.* Ein Winkel $\sphericalangle(\alpha'\beta')$ heisst „rechter Winkel", wenn er seinem eigenen Nebenwinkel kongruent ist: $\sphericalangle(\alpha'\beta') = \sphericalangle(\alpha''\beta')$. Dann ist jeder der acht Winkel $\sphericalangle(\alpha'\beta')$, $\sphericalangle(\beta'\alpha')$, $\sphericalangle(\alpha''\beta')$, ..., die zwei Geraden α und β einschliessen, ein rechter. (Dies folgt leicht aus dem unter 4) Gesagten.) α und β stehen in diesem Fall zueinander „*senkrecht*", in Zeichen: $\alpha \perp \beta$. Analog wie die Länge $|\mathfrak{a}|$ ist nach 2) das Senkrechtstehen zweier Vektoren oder zweier sich nicht schneidenden Geraden erklärt. Die Spiegelung von α_r an $\alpha_{r-1} (\subset \alpha_r)$ führe nun einen Punkt $P (\in \alpha_r)$ in einen andern Punkt P' über; die Gerade PP' steht dann offenbar zu jeder Gerade in α_{r-1} senkrecht; PP' ist, wie man sagt, ein „*Lot*" zu α_{r-1} in α_r. Jede Gerade, welche einem Lot parallel ist, ist auch ein Lot.

Es gibt ein und nur ein Lot zu α_{r-1} in α_r, welche durch einen gegebenen Punkt P von α_r hindurchgeht. (Hieraus folgt u. a. dass alle rechten Winkel kongruent sind.) Wir haben nur noch den Eindeutigkeitsbeweis zu erbringen. Es sei zunächst $r=2$ und $P \bar{\in} \alpha_1$, $P \in \alpha_2'$. β_1 sei ein Lot zu α_1 durch P und $\alpha_0 = \alpha_1 \cap \beta_1$. Durch α_0 wird α_1 bzw. β_1 je in zwei Halbgeraden α_1', α_1'' bzw. $\beta_1' (\ni P)$, β_1'' zerlegt. Da $\sphericalangle(\beta_1'\alpha_1') \equiv \sphericalangle(\beta_1''\alpha_1')$ ist, gibt es ein $S \in \mathfrak{S}$ mit $S(\beta_1') = \beta_1''$ und $S(\alpha_1') = \alpha_1'$. S führt also die Kette $\alpha_2' \supset \alpha_1' \supset \alpha_0$ in $\alpha_2'' \supset \alpha_1' \supset \alpha_0$ über, folglich ist S die Spiegelung von α_2 an α_1. $P' = S(P)$ liegt mithin auf β_1'', und β_1 bestimmt sich als die Gerade PP'. Liegt nun P auf α_1 und gäbe es zwei Lote zu α_1 durch P in α_2, so würden die zwei Parallelen zu diesen Loten durch einen ausserhalb α_1 liegenden Punkt beide zu α_1 senkrecht stehen, was dem eben Gezeigten widerspricht. Gibt es schliesslich in α_r, $r \geqq 3$ zwei Lote β_1, γ_1 zu α_{r-1} durch $P \in \alpha_r$, so sind β_1, γ_1 zwei Lote in $\alpha_2 = \beta_1 \cup \gamma_1$ zu $\alpha_1 = \alpha_{r-1} \cap \alpha_2$ durch P, was mit der Eindeutigkeit im Falle $r=2$ in Widerspruch steht.

6) *Rechtwinklige Koordinatensysteme.* Ein affines Koordinatensystem $\mathfrak{K} = (O \mid P_1 P_2, \ldots, P_n)$ heisst „rechtwinklig", wenn

$$OP_i \perp OP_j, \quad i \neq j \quad \text{und} \quad |OP_1| = \cdots = |OP_n| = 1$$

gilt. Aus 3) und 5) folgt: Zu jeder Kette von Halbräumen A in R gibt es ein und nur ein ihr zugehöriges rechtwinkliges Koordinatensystem $\mathfrak{K}_A$. Umgekehrt bestimmt offenbar jedes rechtwinklige Ko-

6) Dies ist erst mit der Schlussweise von 7) beweisbar, wobei die Pythagoreizität von K benutzt wird. Das Bestehen dieser Kongruenz gilt tätsächlich als eine mit der Pythagoreizität von K gleichwertige Annahme. Vgl. D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Anhang II.

ordinatensystem $\mathfrak{K}$ eine Kette A, sodass $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_A$ ist. Hieraus sieht man leicht ein: *$\mathfrak{G}$ ist die Gruppe aller derjenigen affinen Transformationen, die ein rechtwinkliges Koordinatensystem in ebensolche Systeme überführen.*

7) *Pythagoreischer Lehrsatz*[7]. Es sei $(O \mid P_1, P_2)$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem in einer Ebene. In $\mathfrak{G}$ liegt die „Drehung" D um O, welche $P_1(1, 0)$ in $P_2(0, 1)$ und $P_2(0, 1)$ in $P_1'(-1, 0)$ überführt, weil $\sphericalangle P_1OP_2 \equiv \sphericalangle P_2OP_1' \equiv$ rechter Winkel ist:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus einem Punkt $Q_1(a, b)$ ergeben sich durch die Verwendung von D sukzessiv $Q_2=D(Q_1)=(-b, a)$, $Q_1'=D(Q_2)=(-a, -b)$, $Q_2'=D(Q_1')=(b, -a)$. Da Q_1OQ_1' bzw. Q_2OQ_2' je auf einer Gerade liegen, und da $\sphericalangle Q_1OQ_2 \equiv \sphericalangle Q_2OQ_1'$ ist, schneiden sich zwei Geraden Q_1Q_1' und Q_2Q_2' in O senkrecht zueinander. Die Spiegelung S dieser Ebene an der Gerade Q_1OQ_1' führt also den Punkt Q_2 in Q_2' über und lässt den Punkt Q_1 fest. Daraus berechnet man leicht die Matrix dieser Spiegelung:

$$S=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

Wählt man hier a, b in geeigneter Weise, so kann man durch diese Spiegelung die Halbgerade OP_1 in eine Halbgerade $OP: y=mx (m>0$, sonst beliebig; $x, y \geqq 0)$ überführen. Dazu braucht man nämlich nur die quadratische Gleichung

$$\frac{2ab}{a^2-b^2}=m \quad \text{oder} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2-2m_1\left(\frac{a}{b}\right)-1=0 \quad \text{mit} \quad m_1=\frac{1}{m}$$

aufzulösen; die Lösung $a/b=m_1+\sqrt{1+m_1^2}$ liegt sicher in K, weil K Pythagoreisch ist. Man trage nun auf OP eine Strecke OP' der Länge l ab. Durch die eben erhaltene Spiegelung S wird dann der Punkt $(l, 0)$ zum Punkt P' gebracht. Die Koordinaten (x, y) von P' sind also:

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}l, \qquad y=\frac{2ab}{a^2+b^2}l.$$

Daraus folgt $x^2+y^2=l^2$, was eben den Pythagoreischen Lehrsatz ausdrückt. Nach diesem Satz schliesst man durch die vollständige Induktion: *Haben zwei Punkte P, Q bzw. die Koordinaten $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem, so gilt für die Länge der Strecke PQ:*

$$|PQ|^2=(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2 \tag{1}$$

8) *$\mathfrak{G}$ ist die Gesamtheit derjenigen affinen Transformationen, die die Länge* (1) *jeder Strecke unverändert lassen.* Aus dem Pythagoreischen Lehrsatz folgt nämlich, dass das Lot durch P zu $\mathfrak{a}_r$ der kürzeste Weg von P zu $\mathfrak{a}_r$ ist. Eine Transformation, die die Länge invariant

7) Erst in diesem Schritt braucht man die Annahme, dass K Pythagoreisch ist.

lässt, lässt also auch den rechten Winkel invariant, führt mithin jedes rechtwinkliges Koordinatensystem in ein ebensolches über. Nach 6) folgt also unsere Behauptung.

Der Beweis des Satzes ist somit beendet.

Zusatz. *Es sei* $\mathfrak{G}_0$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{A}$, *deren Transformationen einen Punkt* O *fest lassen.* $\mathfrak{G}_0$ *erfülle ferner die Forderungen* I *und* II *für diejenigen Ketten von Halbräumen, deren* 0*-dimensionales Element der Punkt* O *ist (Forderung der freien Beweglichkeit um den Punkt* O*). Dann ist* $\mathfrak{G}_0$ *die Gruppe aller affinen Transformationen, die den Punkt* O *und die Länge beliebiger Strecken invariant lassen.*

In der Tat erzeugen die Gruppe $\mathfrak{G}_0$ und die Gruppe aller Translationen von R zusammen offenbar die Gruppe $\mathfrak{G}$ des Satzes.

§ 2. Jetzt fragen wir uns, ob die Forderung II eine Folge von I ist. Man bemerke zunächst, dass die *Existenz* einer Transformation aus $\mathfrak{G}$, welche A_r in B_r überführt, aus I allein folgt. Es handelt sich also nur um die *Eindeutigkeit* dieser Transformation in $\mathfrak{G}(a_r)$, um die Entscheidung also, ob folgende Behauptung richtig ist: Die Identität ist die einzige Transformation von $\mathfrak{G}(a_r)$, die eine Kette von Halbräumen A_r in a_r auf sich selbst abbildet. Wir beweisen nun:

Ist K *der Körper der reellen Zahlen und ist ferner* $\mathfrak{G}$ *eine abgeschlossene Untergruppe von* $\mathfrak{A}$ *(oder, was dasselbe ist, eine Liesche Transformationsgruppe), so folgt* II *schon aus* I *allein. Die Gruppe der Bewegungen lässt sich also als* I *genügende Liesche Untergruppe von* $\mathfrak{A}$ *vollständig charakterisiert.*

Wir beweisen diese Behauptung durch die Induktion nach n. Diese sei für R^k, $k<n$ schon bewiesen. Es sei a_r ein Teilraum von $R=R^n$, A_r eine Kette von Halbräumen in a_r. Die Gesamtheit aller Transformationen aus $\mathfrak{G}$, die A_r in sich selbst überführen, bildet eine Liesche Untergruppe $\mathfrak{G}_{A_r}$ von $\mathfrak{G}$. Diese Gruppe erfüllt, als Gruppe der Transformationen vom $(n-r)$-dimensionalen affinen Raum R/a_r (der durch Identifizierung aller Punkte, die in einem zu a_r parallelen Teilraum liegen, aus R entsteht) betrachtet, die Forderung der freien Beweglichkeit um den „Punkt" a_r. Also ist sie nach der Induktionsvoraussetzung (und nach dem Zusatz in § 1) die $(n-r)$-dimensionale orthogonale Gruppe O_{n-r}. Die Matrix der Transformation T aus $\mathfrak{G}_{A_r}$ hat also die Gestalt

$$T=\begin{pmatrix} A_T & * \\ 0 & O_T \end{pmatrix}, \quad A_T=\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}, \quad a_1, \dots, a_r>0,$$

wenn die erste r Koordinaten der Kette A_r zugehören. O_T durchläuft dabei *alle* Transformationen von O_{n-r}. Da diese Zuordnung $T\to O_T$ offenbar eine eineindeutige ist, ist also $O_T\to A_T$ eine Darstellung von O_{n-r} durch die „dreieckige" Matrizes A_T. Nun ist diese Darstellung von den infinitesimalen Transformationen erzeugbar, also sicher stetig. Da O_{n-r} kompakt ist, folgt daraus zunächst $a_1=\dots=a_r=1$, und dann nach einer leichten Überlegung, dass auch das Dreieck oberhalb der Hauptdiagonale von A_T mit lauter Nullen besetzt ist. Dies besagt aber, dass die Transformationen von $\mathfrak{G}_{A_r}$ den Teilraum a_r punktweise fest lassen, w. z. b. w.

Bemerkung. Die Gruppe O_k besitzt den Normalteiler O_k^+ von Index 2, der, den Fall $k=2$ ausgenommen, mit seiner eigenen Kommutatorgruppe übereinstimmt. (O_1^+ ist die Einheitsgruppe.) Die Gruppe der dreieckigen Matrizes ist aber immer auflösbar. Die Darstellung von O_k^+ mittels solcher Matrizes ist daher notwendig Einsdarstellung. Da $a_1, \cdots, a_r > 0$ ist, folgt daraus leicht, dass auch alle Transformationen der ganzen Gruuppe O_k durch die Einheitsmatrix dargestellt sind. Hierbei braucht man keine Stetigkeitsbetrachtung. Dieselbe Schlussweise versagt leider im Falle $k=2$, wegen der Kommutativität von O_2^+. Jedenfalls reicht die Forderung I allein ohne jede weitere topologische Annahme wenigstens für den Fall $n=2$ aus. (Der Fall $n=1$ ist trivial.) Ob die Forderung II (oder eine topologische Bedingung) für $n \geqq 3$ wirklich notwendig ist oder nicht, ist noch eine offene Frage.