57. Einige Sätze über freie Gruppen.

Von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

1. Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe. Die durch $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_n=[\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{n-1}]$[1] $(n=2, 3, \dots)$ definierte Kette von Untergruppen von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{Z}_1 \supset \mathfrak{Z}_2 \supset \mathfrak{Z}_3 \supset \cdots \supset \mathfrak{Z}_n \supset \cdots \tag{1}$$

heisst die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}$[2]. $\mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{Z}_i$ ist dann im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_i$ enthalten, also abelsch und hat endlich viele Erzeugende, wenn $\mathfrak{G}$ selbst endlich viele Erzeugende besitzt. Wenn $\mathfrak{Z}_n$ für irgendein n mit der Einheitsgruppe zusammenfällt, so nennt man $\mathfrak{G}$ nilpotent[3]. Es gilt dann

Satz 1. *$\mathfrak{G}$ sei eine nilpotente Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Der Durchschnitt aller Normalteiler mit endlichen Indizen ist dann die Einheitsgruppe.*

Zum Beweis schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe und $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit endlich vielen Erzeugenden. Ist $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}]$ eine endliche Gruppe und im Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten, so enthält $\mathfrak{N}$ eine Untergruppe $\mathfrak{M}$ mit einem endlichen Index $[\mathfrak{N}:\mathfrak{M}]$, die in $\mathfrak{z}$ enthalten ist und durch endlich viele Elemente erzeugt wird.

Beweis. l sei die Ordnung von $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}]$. Da $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}]$ in $\mathfrak{z}$ enthalten ist, so gilt für beliebige $A \in \mathfrak{G}$, $N \in \mathfrak{N}$

$$(A, N)^l = (A, N^l) = 1^{4)}.$$

Daher ist N^l ein Element aus $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{M}=\{N^l;\ N \in \mathfrak{N}\}$ hat alle behaupteten Eigenschaften.

Beweis von Satz 1. Wir setzen

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}_1 \supset \mathfrak{Z}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{Z}_n = 1$$

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{Z}_i, \qquad i=2, \dots, n.$$

$\mathfrak{F}_{i_1}, \mathfrak{F}_{i_2}, \dots, \mathfrak{F}_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ seien sämtliche unendliche Gruppen unter $\mathfrak{F}_i$. Der Satz ist offenbar richtig falls $k=0$. Wir wenden also die Induktion nach k an.

Sei zunächst $i_k \neq n$. Nach dem obigen Hilfssatz, angewandt auf

$$\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i_k+1}, \quad \overline{\mathfrak{N}}=\mathfrak{Z}_{i_k-1}/\mathfrak{Z}_{i_k+1}, \quad [\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{N}}]=\mathfrak{Z}_{i_k}/\mathfrak{Z}_{i_k+1},$$

gibt es eine solche Gruppe $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{Z}_{i_k-1}$, so dass $[\mathfrak{Z}_{i_k-1}:\mathfrak{M}]$ endlich ist und $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}_{i_k+1}$ im Zentrum von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten ist. Setzt man alsdann

1) Die Klammer soll die Kommutatorbildung bedeuten.

2) Vgl. H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie (1937), S. 118.

3) Vgl. H. Zassenhaus, l. c., S. 105, 119.

4) (A, N) bedeutet den Kommutator von $A, N: (A, N)=ANA^{-1}N^{-1}$. Für diese Gleichheit vgl. H. Zassenhaus, l. c., S. 57.

$$\overline{\overline{\mathfrak{G}}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i_k+2}\,,\qquad \overline{\overline{\mathfrak{M}}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}_{i_k+2}\,,$$

so folgt aus der letzten Eigenschaft von $\mathfrak{M}$ dass $[\overline{\overline{\mathfrak{G}}}, \overline{\overline{\mathfrak{M}}}]$ in $\mathfrak{Z}_{i_k+1}/\mathfrak{Z}_{i_k+2}$ enthalten ist. Nach nochmaliger Anwendung des Hilfssatzes ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{M}$ eine Untergruppe $\mathfrak{M}^*$ mit endlichem $[\mathfrak{M}:\mathfrak{M}^*]$ enthält, die im Zentrum von $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ enthalten ist. So fortfahrend bekommt man schliesslich eine Gruppe $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{Z}_{i_k-1}$ mit einem endlichen Index $[\mathfrak{Z}_{i_k-1}:\mathfrak{K}]$, die im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt und endlich viele Erzeugende hat.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathfrak{G} \arrow[r, dash] & \mathfrak{Z}_{i_k-1} \arrow[r, dash, "\text{unend.}"] \arrow[d, dash, "\text{end.}"'] & \mathfrak{Z}_{i_k} \arrow[r, dash, "\text{end.}"] & \mathfrak{Z}_{i_k+1} \arrow[r, dash, "\text{end.}"] & \mathfrak{Z}_{i_k+2} \arrow[r, dash, "\text{end.}"] & \cdots \arrow[r, dash] & \mathfrak{Z}_n \arrow[d, dash, "\text{end.}"] \\
& \mathfrak{M} \arrow[rr, dash, "\text{end.}"'] & & \mathfrak{M}^* \arrow[r, dash, "\text{end.}"'] & \cdots \arrow[r, dash] & \mathfrak{K} \arrow[r, dash, "\text{unend.}"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Auch im Fall $i_k=n$ bleibt die letzte Aussage gültig, wenn man als $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{Z}_{i_k-1}$ selbst nimmt.

Nun sei $\mathfrak{K}^*$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{K}$ mit einem endlichen Index $[\mathfrak{K}:\mathfrak{K}^*]$. Der Satz ist dann gültig für $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}^*$ nach der Induktionsvoraussetzung: Der Durchschnitt aller Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit endlichen $[\mathfrak{G}:\mathfrak{N}]$, welche $\mathfrak{K}^*$ enthalten, ist also gerade $\mathfrak{K}^*$. Andereseits ist aber $\mathfrak{K}$ eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, also fällt der Durchschnitt aller solchen $\mathfrak{K}^*$ mit der Einheitsgruppe zusammen. Der Satz ist somit für $\mathfrak{G}$ selbst bewiesen.

In diesem Satz ist diejenige Bedingung wesentlich, dass $\mathfrak{G}$ durch endlich viele Elemente erzeugbar ist: z. B. gilt der Schluss des Satzes nicht für die additive Gruppe aller rationalen Zahlen.

2. Nun betrachten wir freie Gruppen. Es sei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe mit beliebig vielen Erzeugenden S_i, und

$$A=S_{i_1}^{\pm 1}\cdots S_{i_k}^{\pm 1}\neq 1$$

sei ein beliebiges Wort in $\mathfrak{F}$. Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{N}$ die durch $S_{i_1},\dots,S_{i_k}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{F}$ bzw. den durch sämtliche übrige S_i erzeugten Normalteiler von $\mathfrak{F}$, so gilt, wie leicht ersichtlich,

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{N}\,,\qquad \mathfrak{G}\frown\mathfrak{N}=1\,,\qquad \mathfrak{F}/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{G}\,. \tag{2}$$

Die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}$ sei wieder durch (1) gegeben. $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_n$ ist dann offenbar eine nilpotente Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden $S_{i_1},\dots,S_{i_k}$. Nach Satz 1 fällt also der Durchschnitt aller $\mathfrak{Z}_n$ enthaltenden Normalteiler in $\mathfrak{G}$ mit endlichen Indizen mit $\mathfrak{Z}_n$ zusammen. Da $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe ist, so ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{Z}_n$ nach einem Satz von Magnus[1] die Einheitsgruppe. Satz 1 ist somit auch für $\mathfrak{G}$ richtig. Es gibt also in $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler mit

1) W. Magnus, Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, Crelles Journ. 177 (1937).

einem endlichen Index, welcher das Element A nicht enthält. Nach (2) gibt es dann auch in $\mathfrak{F}$ einen Normalteiler mit einem endlichen Index, in welchem A nicht liegt. Da aber $A \neq 1$ beliebig in $\mathfrak{F}$ ausgewäht worden ist, so gilt Satz 1 auch für $\mathfrak{F}$ statt $\mathfrak{G}$. Somit is also bewiesen der

Satz 2. *$\mathfrak{F}$ sei eine freie Gruppe mit beliebig vielen Erzeugenden. Der Durchschnitt aller Normalteiler in $\mathfrak{F}$ mit endlichen Indizen fällt dann mit der Einheitsgruppe zusammen.*

Aus Satz 2 ergeben sich ohne Weiteres folgende Sätze.

Satz 3. *Es seien nicht leere, reduzierte Worte $W_1(S_1, \cdots, S_n), \cdots, W_k(S_1, \cdots, S_n)$ von $S_1, \cdots, S_n$ gegeben. Es gibt dann eine solche endliche Gruppe mit den Erzeugenden $S_1, \cdots, S_n$ in welcher $W_1(S_1, \cdots, S_n) \neq 1, \cdots, W_k(S_1, \cdots, S_n) \neq 1$ ausfallen.*

Satz 4. *Eine freie Gruppe besitzt genügend viele fastperiodische Funktionen; sie ist also „maximal-fastperiodisch“ (maximally almost periodic*[1]*).*

Mit Hilfe der fastperiodischen Funktionen lässt sich die „schwache“ Topologie in eine beliebige Gruppe einführen. Nach Satz 4 genügt diese Topologie im Fall der freien Gruppen dem Trennungsaxiom. Man kann daraus sofort den folgenden Satz herleiten[2].

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe und $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{F}$. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{N}$ in bezug auf der oben genannten Topologie sei mit $\mathfrak{N}^*$ bezeichnet. Setzt man ferner*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}^*,$$

so gilt:

(i) die Gesamtheit der fastperiodischen Funktionen von $\mathfrak{G}$ fällt mit der der fastperiodischen Funktionen von $\mathfrak{G}^*$ zusammen;

(ii) $\mathfrak{G}^*$ ist maximal-fastperiodisch;

(iii) $\mathfrak{G}$ ist folglich genau dann maximal-fastperiodisch, wenn $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{F}$ abgeschlossen ist, und genau dann minimal-fastperiodisch, wenn $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{F}$ überall dicht liegt.

---

1) Vgl. J. v. Neumann, Almost periodic functions in a group. I, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934).

2) Vgl. eine Note des Verfassers in „Isō-Sūgaku“ 4, 2 (1942) (japanisch).