55. Über die Erweiterung der maximalen Ideale in normierten Ringen.

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

Es sei R_1 ein normierter Ring im Sinne Gelfands[1] und R_2 ein abgeschlossener Teilring von R_1, der die Einheit e von R_1 enthält. In dieser Note soll ein Satz über die Erweiterung der maximalen Ideale von R_2 zu ebensolchen Idealen von R_1 bewiesen werden[2].

Satz. In einem normierten Ring R_1 sei eine eineindeutige Zuordnung von R_1 auf sich

$$x \leftrightarrow \bar{x}$$

so definiert, dass für jedes maximale Ideal M_1 von R_1 $\overline{x(M_1)} = \bar{x}(M_1)$ gilt. Dabei soll $x(M_1)$ die komplexe Zahl mit $x \equiv x(M_1)e$ (mod. M_1) und $\overline{x(M_1)}$ die zu ihr konjugiert komplexe Zahl bedeuten.

Ist R_2 ein abgeschlossener Teilring mit der Einheit e von R_1 und enthält R_2 mit x zugleich $\bar{x}$ in sich, so lässt sich jedes maximale Ideal M_2 von R_2 zu einem maximalen Ideal M_1 von R_1 erweitern.

Beweis. Es sei M_2^0 ein maximales Ideal von R_2. Wenn M_2^0 in keinem maximalen Ideal von R_1 enthalten ist, dann gibt es für jedes maximale Ideal M_1 von R_1 ein Element $x \in M_2^0$ mit $x(M_1) \neq 0$. Da die Gesamtheit $\mathfrak{M}_1$ aller maximalen Ideale von R_1 einen bikompakten Raum bildet, gibt es endlich viele Elemente $x_1, \cdots, x_n$ in M_2^0, so dass für $y = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_n\bar{x}_n$ $y(M_1) > 0$ für jedes $M_1 \in \mathfrak{M}_1$ wird. Nach unserer Voraussetzung gehört $\bar{x}_i$ zu R_2 und daher gehört y zu M_2^0.

Es seien $m = \max\limits_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} y(M_1)$, $n = \min\limits_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} y(M_1) > 0$ und $z = me - y$. Dann gilt[3]

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|z^n\|} = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |z(M_1)| = m - n.$$

Andererseits sei $\mathfrak{M}_2$ die Gesamtheit aller maximalen Ideale von R_2

---

1) Vgl. I. Gelfand, Normierter Ring, Rec. Math., **9** (1940), 1–23.

2) Dieselbe Frage ist auch von G. Silov behandelt worden: On the extension of maximal ideals, C. R. Acad. Sci. URSS., **29** (1940), 83–84. Ich habe in meiner früheren Note: Über den Dualitätssatz der Charaktere nichtkommutativer Gruppen, Proc. Phy-math. Soc. Japan, **24** (1942), S. 108, von dem Satz Gebrauch gemacht, der in jener Note von Silov aufgestellt worden ist. Herr S. Kakutani teilte mir aber freundlich mit, dass dort ein anderer Erweiterungssatz gebraucht werden musste, um denselben Schluss zu erzielen. Der im folgenden aufgestellte Satz entspricht diesem Bedürfnis.

3) Vgl. I. Gelfand, loc. cit. 1), Satz 8′.

und $z(M_2)$ die komplexe Zahl mit $z \equiv z(M_2)e$ (mod. M_2). Dann gilt für $z \in R_2$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|z^n\|} = \max_{M_2 \in \mathfrak{M}_2} |z(M_2)| \geqq |z(M_2^0)| = m\,, \tag{2}$$

was mit (1) widerspricht. Also muss M_2^0 in einem maximalen Ideal M_1 von R_1 enthalten sein.