54. Über den Mittelwert der messbaren fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

Bekanntlich ist der Mittelwert der H. Bohrschen fastperiodischen Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ durch die Formel

$$M\{f(x)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)dx \tag{1}$$

gegeben. Andererseits ist die Existenz des Mittelwertes der fastperiodischen Funktion auf einer allgemeinen Gruppe von J. von Neumann[1)] festgestellt.

In der vorliegenden Note soll eine Formel für den Mittelwert der messbaren fastperiodischen Funktion auf einer im Kleinen bikompakten, zusammenhängenden abelschen Gruppe gegeben werden, aus der sich die Formel (1) als ein Spezialfall ergibt.

Satz. Es sei G eine abelsche, im Kleinen bikompakte, zusammenhändende Gruppe und m das Haarsche Mass von G. D sei eine beliebige offene, totalbeschränkte Menge von G. Wir bezeichnen mit E_n die Menge

$$E_n = D^n = \{x_1 + \cdots + x_n\,;\ x_i \in D,\ i = 1, \dots, n\}\,. \tag{2}$$

Dann gilt für jede messbare fastperiodische Funktion $f(x)$ auf G die Formel

$$M\{f(x)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f(x)m(dx)\,, \tag{3}$$

wobei $M\{f(x)\}$ den Mittelwert von $f(x)$ bedeutet.

Wenn G die additive Gruppe aller reellen Zahlen und $D = (-1, 1)$ ist, dann ist die Formel (3) nichts anders als die Formel (1).

Hierbei ist die Bedingung $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, $\vee_{n=1}^{\infty} E_n = G$ $\big(m(E_n) < \infty\big)$ für die Folge $\{E_n\}$ nicht genügend. Dann braucht nämlich $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f(x)m(dx)$ nicht zu existieren, wie man leicht anzugebenden Beispielen bestätigen kann.

Um den Satz zu beweisen, genügt es nun beiderlei zu zeigen:

(I) *Es sei $\{E_n\}$ eine Folge der messbaren Mengen $\big(m(E_n) < \infty\big)$, so dass für jedes Element $a \in G$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} m\big(E_n \ominus (E_n + a)\big) = 0^{2)}\,. \tag{4}$$

1) J. von Neumann, Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 445–492.

2) $\ominus$ bedeutet die symmetrische Differenz: $A \ominus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

gilt. Dann gilt für jede messbare fastperiodische Funktion $f(x)$ *die Formel* (3) *mit diesen Folge* $\{E_n\}$.

(II) *Für die Folge* $\{E_n\}$, *die durch* (2) *gegeben ist, gilt* (4).

Beweis von (I). Nach der Definition von $M\{f(x)\}$[3] gibt es für jede gegebene positive Zahl ε endlich viele Elemente $a_i \in G$, und reelle Zahlen $\alpha_i > 0$ $(i=1, \dots, n)$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, so dass

$$| Mf - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x-a_i) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes $x \in G$ gilt. Dann ist

$$\left| \frac{1}{m(E)} \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x-a_i) m(dx) - Mf \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{m(E)} \left\{ \int_E f(x) m(dx) - \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x-a_i) m(dx) \right\} \right| \\ &\leqq \frac{1}{m(E)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left| \int_{E \ominus (E+a_i)} f(x) m(dx) \right| \\ &\leqq \max |f(x)| \frac{1}{m(E)} \sum_{i=1}^n \alpha_i m\big(E \ominus (E+a_i)\big)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Es sei nun $\varepsilon' \max |f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{m(E_n)} m\big(E_n \ominus (E+a_i)\big) < \varepsilon'$ für $n \geqq n_0$ $(i=1, \dots, n)$. Dann folgt aus (6) und (7)

$$\left| Mf - \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f(x) m(dx) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon' \max |f(x)| \leqq \varepsilon$$

für $n \geqq n_0$, w. z. b. w.

Beweis von (II). Nach dem Struktursatz von L. Pontrjagin[4] ist G die direkte Summe von einer r-dimensionalen Euklidischen Vektorgruppe V und einer bikompakten zusammenhängenden Gruppe K: $G = V + K$. Die Menge D enthält also eine Menge $D_1 + D_2 = \{x_1 + x_2;\ x_1 \in D_1 \subset V,\ x_2 \in D_2 \subset K\}$, wobei D_i offene Mengen sind. Da G und also K zusammenhängend sind, gilt nach einem Satz von O. Schreier $K = \bigvee_{n=1}^\infty D_2^n$. Nach der Bikompaktheit von K folgt daher $K = D_2^n$ für $n \geqq n_1$. Daraus ergibt sich

$$D^n = D_0^n + K = \{x_1 + x_2;\ x_1 \in D_0^n,\ x_2 \in K\}\,, \tag{8}$$

für $n \geqq n_1$, wobei D_0 die Projektion von D auf V: $D_0 = \{x_1;\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in V,\ x_2 \in K$, für geeignetes Element $x \in D\}$ ist.

Nun sei δ eine positive Zahl. Es sei C_δ die Gesamtheit aller Elemente $y \in V$ von der Art, dass die δ-Umgebung von y in D_0 enthalten ist. Wir bezeichnen mit $\bar{D}_0$ bzw. $\bar{C}_\delta$ die konvexe Hülle von D_0 bzw. C_δ.

Wir können dann zeigen, dass

3) Vgl. J. von Neumann, loc. cit. 1).

4) L. Pontrjagin, Topological groups, (1938).

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{n}D_0^n=\{y\,;\ ny\in D_0^n\}\supset \bar{C}_\delta \quad \text{für} \quad n\geqq n(\delta)$$

gilt. Jedes Element $y_0\in\bar{C}_\delta$ wird nämlich durch $y_0=\alpha a+\beta b$, $\alpha,\beta\geqq 0$, $\alpha+\beta=1$, $a,b\in C_\delta$ dargestellt. Nach der Definition von C_δ existiert also eine ganze Zahl $n(\delta)$, so dass es für $n\geqq n(\delta)$ Elemente $a_0,b_0\in D_0$ und ganze Zahlen $\alpha,\beta_0\geqq 0$ $(n=\alpha_0+\beta_0)$ mit $y_0=\frac{\alpha_0}{n}a_0+\frac{\beta_0}{n}b_0$ gibt. Da $\alpha_0a_0+\beta_0b_0\in D_0^n$ ist, gilt alsdann $\frac{1}{n}D_0^n\supset\bar{C}_\delta$.

Andererseits ist klar, dass

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{n}D_0^n\subset\bar{D}_0$$

ist.

Nun sei m_1 bzw. m_2 das Haarsche Mass von V bzw. K $\big(m_2(K)=1\big)$, dann ist das Haarsche Mass m von G das Produktmass von m_1 und m_2: $m=m_1\times m_2$. Aus (8) folgt also

$$\text{(11)} \qquad m(D^n)=m(D_0^n+K)=m_1(D_0^n)\cdot m_2(K)=m_1(D_0^n) \qquad (n\geqq n_1)\,.$$

Es sei $G\ni a=a_1+a_2$, $a_1\in V$, $a_2\in K$. Aus (9), (10), (11) folgt dann

$$\overline{\lim}\left\{\frac{1}{m(D^n)}m\big(D^n\ominus(D^n+a)\big)\right\}=\overline{\lim}\left\{m_1(D_0^n)^{-1}m_1\big(D_0^n\ominus(D_0^n+a_1)\big)\right\}$$

$$=\overline{\lim}\left\{m_1\Big(\frac{1}{n}D_0^n\Big)^{-1}\cdot m_1\Big(\frac{1}{n}D_0^n\ominus\Big(\frac{1}{n}D_0^n+\frac{a_1}{n}\Big)\Big)\right\}$$

$$\leqq\overline{\lim}\left\{m_1(\bar{C}_\delta)^{-1}\cdot\Big(m_1\Big(\bar{D}_0\cup\Big(\bar{D}_0+\frac{a_1}{n}\Big)\Big)-m_1\Big(\bar{C}_\delta\cap\Big(\bar{C}_\delta+\frac{a_1}{n}\Big)\Big)\Big)\right\}$$

$$=m(\bar{C}_\delta)^{-1}\cdot\big(m_1(\bar{D}_0)-m_1(\bar{C}_\delta)\big)\,,$$

denn es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}m_1\Big(\bar{D}_0\cup\Big(\bar{D}_0+\frac{a_1}{n}\Big)\Big)=m_1(\bar{D}_0)$, und $\lim\limits_{n\to\infty}m_1\Big(\bar{C}_\delta\cap\Big(\bar{C}_\delta+\frac{a_1}{n}\Big)\Big)$ $=m_1(\bar{C}_\delta)$. Da $\lim\limits_{\delta\to 0}m_1(\bar{D}_0)-m_1(\bar{C}_\delta)=0$ ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(D^n)}m\big(D^n\ominus(D^n+a)\big)=0\,,$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Dieselbe Formel (3) gilt auch für im Kleinen bikompakten, zusammenhängenden Gruppen, die genügend viele stetige fastperiodische Funktionen haben[5].

---

5) H. Freudenthal, Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen, Ann. of Math., **37** (1936), 57–77.