69. *Sur une application du tenseur conforme C_{jk} et de la scalaire conforme C.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1943.)

§ 1. Considérons un sous-espace à m dimensions plongé dans un espace à n dimensions à connexion conforme normale. Alors, on peut donner deux sortes de connexion conforme à ce sous-espace. L'une est la connexion conforme normale intrinsèque au sous-espace, l'autre est la connexion conforme induite sur le sous-espace par la connexion conforme de l'espace ambiant.

Si l'on représente la connexion normale intrinsèque par les formules

$$(1.1)\qquad \begin{cases} {}^*\delta A_{\dot 0} = dx^i A_i, \\ {}^*\delta A_j = {}^*\Pi^{\dot 0}_{jk} dx^k A_{\dot 0} + {}^*\Pi^{i}_{jk} dx^k A_i + {}^*\Pi^{\dot\infty}_{jk} dx^k A_{\dot\infty}, \\ {}^*\delta A_{\dot\infty} = {}^*\Pi^{i}_{\dot\infty k} dx^k A_i, \end{cases}$$

et la connexion induite par

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \delta A_{\dot 0} = dx^i A_i, \\ \delta A_j = \Pi^{\dot 0}_{jk} dx^k A_{\dot 0} + \Pi^{i}_{jk}\, dx^k A_i + \Pi^{\dot\infty}_{jk} dx^k A_{\dot\infty}, \\ \delta A_{\dot\infty} = \Pi^{i}_{\dot\infty k} dx^k A_i, \end{cases}$$

on voit que les composantes ${}^*\Pi^{i}_{jk}$ et Π^{i}_{jk} sont toutes les deux les symboles de Christoffel $\{^{\,i}_{jk}\}$ formés avec les composantes du tenseur fondamental $g_{jk} = A_j A_k$, et que ${}^*\Pi^{\dot\infty}_{jk}$ et $\Pi^{\dot\infty}_{jk}$ sont aussi égales les unes aux autres et sont égales aux composantes du tenseur fondamental g_{jk}.

Or, les composantes ${}^*\Pi^{\dot 0}_{jk}$ et $\Pi^{\dot 0}_{jk}$ et par suite ${}^*\Pi^{i}_{\dot\infty k}$ et $\Pi^{i}_{\dot\infty k}$ n'étant pas toujours égales entre eux, les différences

$$(1.3)\qquad C_{jk} = {}^*\Pi^{\dot 0}_{jk} - \Pi^{\dot 0}_{jk},$$

et

$$(1.4)\qquad C^{i}_{\cdot k} = g^{ij} C_{jk} = {}^*\Pi^{i}_{\dot\infty k} - \Pi^{i}_{\dot\infty k}$$

sont toutes les deux les composantes des tenseurs conformes.

Dans la Note précédente[1], nous avons calculer les composantes du tenseur C_{jk}, et celles de la scalaire $C = \frac{1}{m} g^{ij} C_{ij}$, et en utilisant ces quantités conformes, nous avons obtenu les équations fondamentales pour le sous-espace dans uns espace à connexion conforme normale.

---

1) K. Yano: Sur les équations fondamentales dans la géométrie conforme des sous-espaces. Proc. **19** (1943), 327–334. Dans la suite, on emploie les notations adoptées dans cette Note.

D'autre part, M. Sasaki a introduit une scalaire conforme λ dans ses recherches sur la géométrie de la connexion conforme[1].

Dans la Note présente, nous allons examiner les résultats de M. Sasaki du notre point de vue et montrer que notre scalaire conforme C coïncide bien avec la scalaire conforme λ de M. Sasaki.

Ainsi, pourrait-on voir clairement la significance de la scalaire conforme λ et C.

§ 2. La connexion conforme de l'espace ambiant étant supposée normale, elle peut s'exprimer par les formules

$$
(2.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} dA_0 = \qquad\qquad dx^\lambda A_\lambda\,, \\ dA_\mu = \Pi^0_{\mu\nu} dx^\nu A_0 + \Pi^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu A_\lambda + \Pi^\infty_{\mu\nu} dx^\nu A_\infty\,, \\ dA_\infty = \qquad \Pi^\lambda_{\infty\nu} dx^\nu A_\lambda\,, \end{array}\right.
$$

où l'on a adopté le repère $[A_0, A_\lambda, A_\infty]$ de Veblen.

Cela étant, nous avons défini le repère $[A_{\dot{0}}, A_i, A_P, A_{\dot{\infty}}]$ sur le sous-espace par les formules

$$
(2.2)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_{\dot{0}} = \qquad A_0\,, \\ A_i = \qquad\qquad B_i^{\cdot\lambda} A_\lambda\,, \\ A_P = \dfrac{1}{m} H^a_{\cdot aP} A_0 + B_P^{\cdot\lambda} A_\lambda\,, \\ A_{\dot{\infty}} = \dfrac{1}{2m^2} H^a_{\cdot aP} H^b_{\cdot bP} A_0 + \dfrac{1}{m} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} A_\lambda + A_\infty\,. \end{array}\right.
$$

Ici, $A_{\dot{0}}$ est le point courrant du sous-espace, A_i, m sphères orthogonales au sous-espace, A_P, $n-m$ sphères unitaires tangentes au sous-espace et orthogonales entre elles, $A_{\dot{\infty}}$, le point d'intersection de n sphères A_i et A_P.

D'autre part, après avoir défini

$$
A_{\dot{0}} = A_0 \quad \text{et} \quad A_i = B_i^{\cdot\lambda} A_\lambda\,,
$$

M Sasaki[2] définit une sphere

$$
\frac{1}{m} g^{jk} (\Pi^0_{\mu\nu} B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} - {}^*\Pi^0_{jk}) A_0 + \frac{1}{m} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} A_\lambda + A_\infty\,,
$$

cette sphère n'étant pas en général un point, il définit une scalaire conforme λ de manière qu'on ait un point

$$
(2.3)\qquad A_{\dot{\infty}} = \lambda A_0 + \frac{1}{m} g^{jk} (\Pi^0_{\mu\nu} B^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} - {}^*\Pi^{\dot{0}}_{jk}) A_0 + \frac{1}{m} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} A_\lambda + A_\infty\,.
$$

1) S. Sasaki: Geometry of the conformal connexion, Science Reports of the Tôhoku Imperial University, Series I, Vol. XXIX, (1940), 219–267; On a remarquable property of umbilical hypersurfaces in the geometry of the normal conformal connexion, ibidem. 412–422.

2) S. Sasaki, déjà cité, il emploie le repère naturel, mais pour rendre la circonstance plûs claire, nous emploierons le repère de Veblen. On peut ainsi voir nettement la relation entre la théorie des espaces à connexion conforme normale et la géométrie conforme des espaces de Riemann.

où ${}^*\Pi^{\mathring{0}}_{jk}$ sont les composantes de la connexion conforme normale intrinsèque du sous-espace, èt sont données par

$$ {}^*\Pi^{\mathring{0}}_{jk} = -\frac{R_{jk}}{m-2} + \frac{g^{ab}R_{ab}g_{jk}}{2(m-1)(m-2)} $$

où R_{jk} et R sont le tenseur de Ricci et la courbure scalaire formés avec les composantes du tenseur fondamental $g_{jk}=A_jA_k$.

Or, si l'on exprime la condition que $A_{\dot{\infty}}$ représente un point, on obtient

$$ -2\lambda - \frac{2}{m} g^{jk}(\Pi^0_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} - {}^*\Pi^{\mathring{0}}_{jk}) + \frac{1}{m^2} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H^b_{\cdot b\lambda} = 0 , $$

d'où

$$ \lambda = \frac{1}{2m^2} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H^b_{\cdot b\lambda} - \frac{1}{m} g^{jk}(\Pi^0_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} - {}^*\Pi^{\mathring{0}}_{jk}) . \tag{2.4} $$

Donc, en substituant (2.4) dans (2.3), on voit que la définition (2.3) de $A_{\dot{\infty}}$ coïncide bien avec notre définition (2.2) de $A_{\dot{\infty}}$.

En passant, remarquons que si l'on définit la scalaire conforme λ par

$$ \lambda = \frac{1}{2m^2} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H^b_{\cdot b\lambda} - \frac{1}{m} g^{jk}(\Pi^0_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} - \Pi^{\mathring{0}}_{jk}) , \tag{2.5} $$

c'est-à-dire, dans (2.3), si l'on emploie $\Pi^{\mathring{0}}_{jk}$ au lieu de ${}^*\Pi^{\mathring{0}}_{jk}$, λ s'annule. En effet, les composantes $\Pi^{\mathring{0}}_{jk}$ de la connexion conforme induite sont données par[1]

$$ \Pi^{\mathring{0}}_{jk} = \Pi^0_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} - \frac{1}{m} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H_{jk\lambda} + \frac{1}{2m^2} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H^b_{\cdot b\lambda} g_{jk} , \tag{2.6} $$

d'où

$$ \frac{1}{2m^2} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H^b_{\cdot b\lambda} - \frac{1}{m} g^{jk}(\Pi^0_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} - \Pi^{\mathring{0}}_{jk}) = 0 , $$

donc, $\lambda = 0$[2].

Cela étant, revenons à l'équation (2.4). En substituant

$$ \Pi^0_{\mu\nu}B_j^{\cdot\mu}B_k^{\cdot\nu} = \Pi^{\mathring{0}}_{jk} + \frac{1}{m} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H_{jk\lambda} - \frac{1}{2m^2} H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a} H^b_{\cdot b\lambda} g_{jk} $$

tiré de (2.6) dans (2.4), on trouve

$$ \lambda = \frac{1}{m} g^{jk}({}^*\Pi^{\mathring{0}}_{jk} - \Pi^{\mathring{0}}_{jk}) . \tag{2.7} $$

D'autre part, nous avons, dans la Note précédente, défini le tenseur conforme

---

1) K. Yano et Y. Mutô: Sur la théorie des espaces à connexion conforme normale et la géométrie conforme des espaces de Riemann, Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, Vol. 4 (1941), p. 140.

2) S. Sasaki, le premier des Mémoires déjà cités, p. 250.

$$(2.8)\qquad C_{jk}={}^*\Pi^{\circ}_{jk}-\Pi^{\circ}_{jk}$$

$$=-\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jk}$$

$$+\frac{1}{m-2}M^{\cdot\cdot\lambda}_{ja}M^{a}_{\cdot k\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}g_{jk}\,,$$

et la scalaire conforme

$$(2.9)\qquad C=\frac{1}{m}g^{jk}C_{jk}=\frac{1}{m}g^{jk}({}^*\Pi^{\circ}_{jk}-\Pi^{\circ}_{jk})$$

$$=-\frac{1}{2m(m-1)}(B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda})\,.$$

Il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion conforme intrinsèque et la connexion conforme induite coïncident est que $C_{jk}=0$. Dans ce cas, on a par suite $C=0$. Donc, nous avons le

Théorème[1]. *La condition nécessaire et suffisante pour que la connexion conforme intrinsèque et la connexion conforme induite sur le sous-espace coïncident est que*

$$(2.10)\qquad B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=M^{\cdot\cdot\lambda}_{ja}M^{a}_{\cdot k\lambda}\,.$$

Dans le cas d'une hypersurface, la condition $C_{jk}=0$ et par suit $C=0$ nous donne

$$M^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}=0\,,$$

parce que $M^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}$ pouvant être écrit comme $M_{jk}B^{\lambda}$ (B^{λ} étant la normale unitaire),

$$C=-\frac{1}{2m(m-1)}(B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda})=0$$

montre que $M^{a}_{\cdot b}=0$ et par suite $M^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}=0$, grâce aux relations

$$B^{\omega}_{\lambda}=\delta^{\omega}_{\lambda}-B_{\lambda}B^{\omega}\,,\quad B^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}-B^{\mu}B^{\nu}\,,\quad C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda}=0\,,$$

$$g^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=0\quad\text{et}\quad C^{\lambda}_{\cdot[\mu\nu\omega]}=0\,.$$

Donc, nous avons le

Théorème[2]. *La condition nécessaire et suffisante pour que la connexion conforme intrinsèque et la connexion conforme induite sur une hypersurface coïncident est que l'hypersurface soit totalement ombiliquée et que*

$$B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=0\,.$$

1) K. Yano et Y. Mutô: déjà cité, p. 147.

2) S. Sasaki: On a remarquable property of umbilical hypersurfaces..., déjà cite p. 421.

D'où, on obtient le

Théorème. La condition necessaire et suffisante pour que la connexion conforme intrinsèque et la connexion conforme induite sur une hypersurface plongé dans un espace conforme à un espace euclidien coïncident est que cette hypersurface soit totalement ombiliquée.

Un sous-espace totalement ombiliquee dans un espace conforme à un espace euclidien étant aussi conforme à un espace euclidien[1], on a le

Théorème. Si la connexion conforme intrinsèque et la connexion conforme induite sur une hypersurface plongé dans un espace conforme à un espace euclidien coïncident, cette hypersurface est aussi conforme à un espace euclidien.

Or, les équations (2.7) et (2.9) montrent que la scalaire conforme λ de M. Sasaki coïncide bien avec notre scalaire conforme C. Donc, nous avons les

Théorème. Si la connexion conforme intrinsèque et la connexion conforme induite sur un sous-espace coïncident, la scalaire conforme λ de M. Sasaki et par suite notre scalaire conforme C s'annule.

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que la scalaire conforme λ de M. Sasaki et par suite notre scalaire conforme C définie pour un sous-espace s'annule est que

$$B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}\,.$$

Dans le cas de l'hypersurface, cette condition se réduit à

$$M_{jk}=0\,,$$

donc, nous avons le

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que la scalaire conforme λ de M. Sasaki et par suite notre scalaire conforme C définie pour une hypersurface s'annule est que l'hypersurface soit totalement ombiliquée.

§ 3. Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit une scalaire conforme

$$C=-\frac{1}{2m(m-1)}(B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda})\,.$$

Si l'on effectue une transformation conforme du tenseur fondamental

$$\bar{g}_{jk}=\rho^2 g_{jk}\,, \tag{3.1}$$

cette scalaire se transforme en $\bar{C}$ d'après

$$\bar{C}=\frac{1}{\rho^2}C\,. \tag{3.2}$$

---

1) K. Yano: Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 247–252.

Donc, on voit que le tenseur

$$\mathfrak{G}_{jk}=Cg_{jk}$$

est invariant par rapport à la transformation conforme (3.2).

Donc, en partant de ce tenseur conforme, on peut définir une dérivée covariant conforme sur le sous-espace pourvu que la scalaire conforme C ne s'annule pas sur ce sous-espace.