68. *Sur les équations fondamentales dans la géométrie conforme des sous-espaces.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1943.)

§ 0. Dans quelques travaux antérieurs[1], nous avons trouvé les équations de Gauss, de Codazzi et de Ricci dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens.

Mais, si l'on étudie la condition nécessaire et suffisante pour que les trois tenseurs conformes fondamentaux $\rho^2 g_{jk}$, ρM_{jkP} et L_{PQk} déterminent un sous-espace plongé dans un espace euclidien, on obtient cinq relations entre ces tenseurs conformes fondamentaux, dont les trois sont les équations conformes de Gauss, de Codazzi et de Ricci pour un sous-espace dans un espace euclidien[2].

Le but de cette Note est de trouver les deux autres équations conformes pour un sous-espace dans un espace riemannien général.

Pour cela, on introduit un tenseur conforme C_{jk} et une scalaire conforme C qui joueront un rôle très important dans la théorie des espaces à connexion conforme et la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens.

Une autre application de ces quantités conformes sera trouvée dans la Note suivante.

§ 1. Considérons un espace à connexion conforme normale C_n[3], et prenons, dans chaque espace tangent de Möbius M_n, le repère de Veblen $[A_0, A_\lambda, A_\infty]$[4], alors, la connexion conforme normale sera représentée par les formules de la forme

$$(1.1)\qquad \begin{cases} dA_0 = dx^\lambda A_\lambda\,, \\ dA_\mu = \Pi^0_{\mu\nu} dx^\nu A_0 + \Pi^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu A_\lambda + \Pi^\infty_{\mu\nu} dx^\nu A_\infty\,, \\ dA_\infty = \Pi^\lambda_{\infty\nu} dx^\nu A_\lambda\,, \end{cases}$$

où

1) K. Yano: Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 247–252; Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 340–344; K. Yano et Y. Mutô: Sur la théorie des espaces à connexion conforme normale et la géométrie conforme des espaces de Riemann, Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, **4** (1941), 117–169.

2) K. Yano et Y. Mutô: Sur le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens, Proceedings of the Physico-Math. Soc. Japan, **24** (1942), 437–449.

3) Voir, K. Yano: Sur la théorie des espaces à connexion conforme, Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, **4** (1939), 1–59, et K. Yano et Y. Mutô: Sur la théorie des espaces à connexion conforme normale et la géométrie conforme des espaces de Riemann, déjà cité.

4) Les indices $\begin{cases} \lambda, \mu, \nu, \ldots \\ i, j, k, \ldots \\ P, Q, R, \ldots \end{cases}$ parcourent les symboles $\begin{cases} 1, 2, \ldots\ldots, n \\ \dot{1}, \dot{2}, \ldots\ldots, \dot{m} \\ \dot{m}, \dot{m}+\dot{1}, \ldots, \dot{n} \end{cases}$ respectivement.

$A_0 A_0 = 0, \quad A_\mu A_\nu = g_{\mu\nu}, \quad A_\infty A_\infty = 0, \quad A_0 A_\lambda = 0, \quad A_\infty A_\lambda = 0, \quad A_0 A_\infty = -1,$

et $$\Pi^0_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{R g_{\mu\nu}}{2(n-1)(n-2)}, \quad \Pi^\lambda_{\infty\nu} = g^{\lambda\mu}\Pi^0_{\mu\nu}, \quad \Pi^\infty_{\mu\nu} = g_{\mu\nu},$$

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right),$$

$R_{\mu\nu}$ et R étant respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire formés avec les composantes du tenseur de courbure

$$R^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega} = \frac{\partial \{ {\lambda \atop \mu\nu} \}}{\partial x^\omega} - \frac{\partial \{ {\lambda \atop \mu\omega} \}}{\partial x^\nu} + \{ {\alpha \atop \mu\nu} \}\{ {\lambda \atop \alpha\omega} \} - \{ {\alpha \atop \mu\omega} \}\{ {\lambda \atop \alpha\nu} \}.$$

Cela étant, considérons un sous-espace à m dimensions défini par les équations paramétriques

$$x^\lambda = x^\lambda(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots, \overset{m}{x}), \tag{1.2}$$

et définissons, à chaque point de ce sous-espace, le repère $[A_{\dot 0}, A_i, A_P, A_{\dot\infty}]$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\dot 0} = A_0, \\ A_i = B_i^{\cdot\lambda} A_\lambda, \\ A_P = B_P^{\cdot 0} A_0 + B_P^{\cdot\lambda} A_\lambda, \\ A_{\dot\infty} = \frac{1}{2} B_P^{\cdot 0} B_P^{\cdot 0} A_0 + B_P^{\cdot 0} B_P^{\cdot\lambda} A_\lambda + A_\infty, \end{array} \right. \tag{1.3}$$

où $$B_i^{\cdot\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}, \qquad g_{jk} = g_{\mu\nu} B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu},$$

et $B_P^{\cdot\lambda}$ sont définis par

$$g_{\mu\nu} B_j^{\cdot\mu} B_P^{\cdot\nu} = 0, \qquad g_{\mu\nu} B_P^{\cdot\mu} B_Q^{\cdot\nu} = \delta_{PQ}.$$

Or, si l'on pose la condition que la moyenne de $dA_{\dot 0} dA_P$ par rapport à dx^i s'annule, soit, qu'on ait

$$(B_P^{\cdot 0} g_{jk} - g_{\alpha\beta} H_{jk}^{\cdot\cdot\alpha} B_P^{\cdot\beta}) g^{jk} = 0,$$

on a

$$B_P^{\cdot 0} = \frac{1}{m} H^\alpha_{\cdot\alpha P}, \tag{1.4}$$

ou nous avons posé

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{\partial B_j^{\cdot\lambda}}{\partial x^k} + B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} \{ {\lambda \atop \mu\nu} \} - B_i^{\cdot\lambda} \{ {i \atop jk} \} = H_{jkP} B_P^{\cdot\lambda} \qquad H^i_{\cdot kP} = g^{ij} H_{jkP}.$$

Les points et les sphères $[A_{\dot 0}, A_i, A_P, A_{\dot\infty}]$ étant ainsi définis, leurs déplacements d'après la connexion conforme de l'espace ambiant sont donnes par

$$\left\{ \begin{array}{l} dA_{\dot 0} = dx^i A_i, \\ dA_j = \Pi^{\dot 0}_{jk} dx^k A_{\dot 0} + \Pi^i_{jk} dx^k A_i + \Pi_{jkP} dx^k A_P + \Pi^{\dot\infty}_{jk} dx^k A_{\dot\infty}, \\ dA_P = \Pi^{\dot 0}_{Pk} dx^k A_{\dot 0} + \Pi^i_{Pk} dx^k A_i + \Pi_{PQk} dx^k A_Q, \\ dA_{\dot\infty} = \Pi^i_{\dot\infty k} dx^k A_i + \Pi_{\infty Pk} dx^k A_P, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

où

$$
(1.6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Pi^{\dot 0}_{jk}=\Pi^0_{\mu\nu}B^{\cdot\mu}_jB^{\cdot\nu}_k-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot aP}H_{jkP}+\frac{1}{2m^2}H^{a}_{\cdot aP}H^{b}_{\cdot bP}g_{jk}\,,\\
&\Pi^{i}_{jk}=B^{i}_{\cdot\lambda}(B^{\cdot\lambda}_{j.k}+\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}B^{\cdot\mu}_jB^{\cdot\nu}_k)=\{^{i}_{jk}\}\,,\\
&\Pi_{jkP}=M_{jkP}\,,\qquad \Pi^{\dot\infty}_{jk}=g_{jk}\,,\\
&\Pi^{\dot 0}_{Pk}=\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot aP.k}+\Pi^0_{\mu\nu}B^{\cdot\mu}_PB^{\cdot\nu}_k-\frac{1}{m}L_{PQk}H^{a}_{\cdot aQ}\,,\\
&\Pi^{i}_{Pk}=-g^{ij}M_{jkP}\,,\quad \Pi_{PQk}=L_{PQk}\,,\quad \Pi^{i}_{\dot\infty k}=g^{ij}\Pi^{\dot 0}_{jk}\,,\quad \Pi_{\dot\infty Pk}=\Pi^{\dot 0}_{Pk}\,,
\end{aligned}\right.
$$

et

$$
\left\{\begin{aligned}
&\{^{i}_{jk}\}=\frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj.k}+g_{ak.j}-g_{jk.a})\,,\qquad B^{i}_{\cdot\lambda}=g^{ij}g_{\lambda\mu}B^{\cdot\mu}_j\,,\\
&M^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}=H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}-\frac{1}{m}g^{ab}H^{\cdot\cdot\lambda}_{ab}g_{jk}\,,\qquad M^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}=M_{jkP}B^{\cdot\lambda}_P\,,\\
&L_{PQk}=g_{\mu\nu}B^{\cdot\mu}_{P;k}B^{\cdot\nu}_Q\,,
\end{aligned}\right.
$$

la virgule et le point-virgule désignant respectivement la dérivée ordinaire et la dérivée covariante.

Cela étant, la connexion conforme induite sur le sous-espace (1.2) est définie par

$$
(1.7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta A_{\dot 0}= && dx^iA_i\,,\\
&\delta A_j=\Pi^{\dot 0}_{jk}dx^kA_{\dot 0}+\Pi^{i}_{jk}dx^kA_i+\Pi^{\dot\infty}_{jk}dx^kA_{\dot\infty}\,,\\
&\delta A_{\dot\infty}= && \Pi^{i}_{\dot\infty k}dx^kA_i\,.
\end{aligned}\right.
$$

Mais, on peut, d'autre part, donner aussi la connexion conforme normale intrinsèque au sous-espace (1.2) par

$$
(1.8)\quad \left\{\begin{aligned}
&{}^*\delta A_{\dot 0}= && dx^iA_i\,,\\
&{}^*\delta A_j={}^*\Pi^{\dot 0}_{jk}dx^kA_{\dot 0}+{}^*\Pi^{i}_{jk}\,dx^kA_i+{}^*\Pi^{\dot\infty}_{jk}dx^kA_{\dot\infty}\,,\\
&{}^*\delta A_{\dot\infty}= && {}^*\Pi^{i}_{\dot\infty k}dx^kA_i\,,
\end{aligned}\right.
$$

où

$$
(1.9)\quad {}^*\Pi^{\dot 0}_{jk}=-\frac{R_{jk}}{m-2}+\frac{g^{ab}R_{ab}g_{jk}}{2(m-1)(m-2)}\,,\quad {}^*\Pi^{i}_{jk}=\{^{i}_{jk}\}\,,
$$
$$
{}^*\Pi^{\dot\infty}_{jk}=g_{jk}\,,\quad {}^*\Pi^{i}_{\dot\infty k}=g^{ij}\,{}^*\Pi^{\dot 0}_{jk}\,,
$$

R_{jk} étant le tenseur de Ricci formés avec les composantes du tenseur de courbure

$$
R^{i}_{\cdot jkh}=\{^{i}_{jk}\}_{,h}-\{^{i}_{jh}\}_{,k}+\{^{a}_{jk}\}\{^{i}_{ah}\}-\{^{a}_{jh}\}\{^{i}_{ak}\}\,.
$$

§ 2. On voit, d'après ce qui est dit dans le paragraphe précédent, que la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion induite et la connexion intrinsèque sur le sous-espace coïncident est que le tenseur $C_{jk}={}^*\Pi^{\dot 0}_{jk}-\Pi^{\dot 0}_{jk}$ s'annule. Dans ce qui suit, on va calculer ce tenseur.

Le tenseur $\overset{\circ}{\Pi}{}^{0}_{jk}$ est donné par (1.6), soit, par

$$\text{(2.1)} \qquad \overset{\circ}{\Pi}{}^{0}_{jk}=\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot a\lambda}H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}+\frac{1}{2m^{2}}H^{a}_{\cdot a\lambda}H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b}g_{jk}\,.$$

Pour calculer le tenseur ${}^{*}\overset{\circ}{\Pi}{}^{0}_{jk}$, prenons d'abord les équations de Gauss pour le sous-espace

$$\text{(2.2)} \qquad R^{i}_{\cdot jkh}=B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{i}_{\cdot h\lambda}-H_{jh}^{\cdot\cdot\lambda}H^{i}_{\cdot k\lambda}\,,$$

où et dans la suite on pose, pour simplicité,

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}=B^{i}_{\cdot\lambda}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}B_{h}^{\cdot\omega}; \quad B^{\mu\nu}_{jk}=B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}, \quad B^{\mu\nu}=B^{\mu\nu}_{jk}g^{jk}, \quad B^{\omega}_{\lambda}=B^{i}_{\cdot\lambda}B_{i}^{\cdot\omega}.$$

Or, en contractant $B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}$ au tenseur conforme de courbure de Weyl

$$C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\Pi^{0}_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\omega}-\Pi^{0}_{\mu\omega}\delta^{\lambda}_{\nu}+g_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\infty\omega}-g_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\infty\nu}\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}&+\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}\delta^{i}_{h}-\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{h}^{\cdot\nu}\delta^{i}_{k}\\&+g_{jk}\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{a}^{\cdot\mu}B_{h}^{\cdot\nu}g^{ai}-g_{jh}\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{a}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}g^{ai}\,.\end{aligned}$$

En substituant (2.2) dans cette équation, on obtient

$$\begin{aligned}R^{i}_{\cdot jkh}=B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}&+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{i}_{\cdot h\lambda}-H_{jh}^{\cdot\cdot\lambda}H^{i}_{\cdot k\lambda}-\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}\delta^{i}_{h}\\&+\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{h}^{\cdot\nu}\delta^{i}_{k}-g_{jk}\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{a}^{\cdot\mu}B_{h}^{\cdot\nu}g^{ai}+g_{jh}\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{a}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}g^{ai}\,,\end{aligned}$$

d'où, en contractant par rapport à i et h, on trouve

$$R_{jk}=B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot k\lambda}-(m-2)\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}-g_{jk}\Pi^{0}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\,,$$

et en multipliant par g^{jk} et en contractant par rapport à j et k

$$g^{ab}R_{ab}=B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{b}_{\cdot b\lambda}-H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot b\lambda}-2(m-1)\Pi^{0}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\,.$$

Ces deux équations nous donnent

$$\begin{aligned}{}^{*}\overset{\circ}{\Pi}{}^{0}_{jk}&=-\frac{R_{jk}}{m-2}+\frac{g^{ab}R_{ab}g_{jk}}{2(m-1)(m-2)}\\&=-\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jk}+\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}\\&\quad-\frac{1}{m-2}(H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot k\lambda})+\frac{1}{2(m-1)(m-2)}(H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{b}_{\cdot b\lambda}-H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot b\lambda})g_{jk}\,,\end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned}\text{(2.3)} \quad {}^{*}\overset{\circ}{\Pi}{}^{0}_{jk}=\Pi^{0}_{\mu\nu}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}&-\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jk}\\&+\frac{1}{m-2}M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot k\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}g_{jk}\\&-\frac{1}{m}H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot a\lambda}+\frac{1}{2m^{2}}H^{a\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{b}_{\cdot b\lambda}g_{jk}\,.\end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de (2.1) et de (2.3), on a finalement

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} C_{jk} &= {}^*\Pi^{\circ}_{jk} - \Pi^{\circ}_{jk} \\ &= -\frac{1}{m-2} B^{\omega}_{\lambda} B^{\mu\nu}_{jk} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + \frac{1}{2(m-1)(m-2)} B^{\omega}_{\lambda} B^{\mu\nu} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} g_{jk} \\ &\quad + \frac{1}{m-2} M^{\cdot\cdot\lambda}_{ja} M^{a}_{\cdot k\lambda} - \frac{1}{2(m-1)(m-2)} M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} M^{a}_{\cdot b\lambda} g_{jk}, \end{aligned}$$

ce qui nous montre bien la propriété conforme du tenseur C_{jk}.

Du tenseur C_{jk}, on peut former aussi une scalaire conforme

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} C &= \frac{1}{m} g^{jk} C_{jk} = \frac{1}{m} g^{jk}({}^*\Pi^{\circ}_{jk} - \Pi^{\circ}_{jk}) \\ &= -\frac{1}{2m(m-1)} (B^{\omega}_{\lambda} B^{\mu\nu} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} M^{a}_{\cdot b\lambda}) \end{aligned}$$

Cela etant, nous allons, en passant, calculer les valeurs de Π°_{P} En contractant $B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Pkh}$ à l'expression de $C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$, on obtient

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Pkh} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Pkh} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + \Pi^{0}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_{Pk} \delta^{i}_{h} - \Pi^{0}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_{Ph} \delta^{i}_{k}$$

où

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Pkh} = B^{i}_{\cdot\lambda} B_{P}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} B_{h}^{\cdot\omega}, \qquad B^{\mu\nu}_{Pk} = B_{P}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu}$$

Or, en substituant les équations de Codazzi

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Pkh} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = -H^{i}_{\cdot kP;\,h} + H^{i}_{\cdot hP;\,k} - H^{i}_{\cdot kQ} L_{QPh} + H^{i}_{\cdot hQ} L_{QPk}$$

dans ces équations, on trouve

$$\begin{aligned} B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Pkh} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = &-H^{i}_{\cdot kP;\,h} + H^{i}_{\cdot hP;\,k} - H^{i}_{\cdot kQ} L_{QPh} + H^{i}_{\cdot hQ} L_{QPk} \\ &+ \Pi^{0}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_{Pk} \delta^{i}_{h} - \Pi^{0}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_{Ph} \delta^{i}_{k}, \end{aligned}$$

donc, en posant $i=h$ et en sommant, on obtient

$$\Pi^{0}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_{Pk} = \frac{1}{m-1} (B^{\omega}_{\lambda} B^{\mu\nu}_{Pk} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + H^{a}_{\cdot kP;\,a} - H^{a}_{\cdot aP;\,k} + H^{a}_{\cdot kQ} L_{QPa} - H^{a}_{\cdot aQ} L_{QPk}),$$

d'où
$$\begin{aligned} \Pi^{0}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}_{Ph} = &\frac{1}{m-1} (B^{\omega}_{\lambda} B^{\mu\nu}_{Pk} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + M^{a}_{\cdot kP;\,a} + M^{a}_{\cdot kQ} L_{QPa}) \\ &- \frac{1}{m} H^{a}_{\cdot aP;\,k} - \frac{1}{m} H^{a}_{\cdot aQ} L_{QPk}, \end{aligned}$$

grâce à relation

$$M^{a}_{\cdot kP} = H^{a}_{\cdot kP} - \frac{1}{m} H^{b}_{\cdot bP} \delta^{a}_{k}.$$

Donc, en substituant ce resultat dans (1.6), on obtient

$$(2.6)\qquad \Pi^{\circ}_{Pk} = \frac{1}{m-1} (B^{\omega}_{\lambda} B^{\mu\nu}_{Pk} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + M^{a}_{\cdot kP;\,a} + M^{a}_{\cdot kQ} L_{QPa})$$

§ 3. Les tenseurs de courbure de C_n sont définis par

$$(3.1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\underset{21}{dd}A_0 - \underset{12}{dd}A_0 = 0, \\ &\underset{21}{dd}A_\mu - \underset{12}{dd}A_\mu = \Omega^{0}_{\mu\nu\omega} \underset{1}{dx^\nu} \underset{2}{dx^\omega} A_0 + \Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \underset{1}{dx^\nu} \underset{2}{dx^\omega} A_\lambda, \\ &\underset{21}{dd}A_\infty - \underset{12}{dd}A_\infty = \qquad\qquad \Omega^{\lambda}_{\infty\nu\omega} \underset{1}{dx^\nu} \underset{2}{dx^\omega} A_\lambda, \end{aligned} \right.$$

où

$$(3.2)\qquad \Omega^0_{\mu\nu\omega}=\Pi^0_{\mu\nu;\,\omega}-\Pi^0_{\mu\omega;\,\nu}\,,\qquad \Omega^\lambda_{\infty\nu\omega}=g^{\lambda\mu}\Omega^0_{\mu\nu\omega}\,,$$

$$(3.3)\qquad \Omega^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}=R^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}+\Pi^0_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega-\Pi^0_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu+g_{\mu\nu}\Pi^\lambda_{\infty\omega}-g_{\mu\omega}\Pi^\lambda_{\infty\nu}\,,$$

et les tenseurs de courbure du sous-espace C_m à connexion conforme induite par

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \underset{21}{\delta\delta}A_{\dot 0}-\underset{12}{\delta\delta}A_{\dot 0}=0\,, \\ \underset{21}{\delta\delta}A_j-\underset{12}{\delta\delta}A_j=\Omega^{\dot 0}_{jkh}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_{\dot 0}+\Omega^i_{\cdot jkh}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_i\,, \\ \underset{21}{\delta\delta}A_{\dot\infty}-\underset{12}{\delta\delta}A_{\dot\infty}=\qquad\qquad \Omega^{\dot i}_{\infty kh}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_i\,, \end{cases}$$

où

$$(3.5)\qquad \Omega^{\dot 0}_{jkh}=\Pi^{\dot 0}_{jk;\,h}-\Pi^{\dot 0}_{jh;\,k}\,,\qquad \Omega^{\dot i}_{\infty kh}=g^{ij}\Omega^{\dot 0}_{jkh}\,,$$

$$(3.6)\qquad \Omega^i_{\cdot jkh}=R^i_{\cdot jkh}+\Pi^{\dot 0}_{jk}\delta^i_h-\Pi^{\dot 0}_{jh}\delta^i_k+g_{jk}\Pi^{\dot i}_{\infty h}-g_{jh}\Pi^{\dot i}_{\infty k}\,.$$

La connexion conforme de l'espace ambiant étant normale, $\Omega^0_{\mu\nu\omega}$ coïncide avec le tenseur de J. M. Thomas et $\Omega^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}$ avec le tenseur conforme de courbure de H. Weyl.

Donc, d'après la notation habituelle, nous les désignerons par $C^0_{\mu\nu\omega}$ et $C^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}$ respectivement.

Mais, la connexion induite n'étant pas toujours normale, en substituant

$$\Pi^{\dot 0}_{jk}={}^*\Pi^{\dot 0}_{jk}-C_{jk}$$

dans (3.5) et (3.6), on obtient respectivement

$$(3.7)\qquad \Omega^{\dot 0}_{jkh}=C^{\dot 0}_{jkh}-C_{jk;\,h}+C_{jh;\,k}\,,$$

$$(3.8)\qquad \Omega^i_{\cdot jkh}=C^i_{\cdot jkh}-C_{jk}\delta^i_h+C_{jh}\delta^i_k-g_{jk}C^i_{\cdot h}+g_{jh}C^i_{\cdot k}\,.$$

où $C^{\dot 0}_{jkh}$ et $C^i_{\cdot jkh}$ sont les tenseurs de courbure de J. M. Thomas et de H. Weyl pour le sous-espace et $C^i_{\cdot k}=g^{ij}C_{jk}$.

Or, nous avons

$$(3.9)\qquad \begin{aligned} \underset{21}{dd}A_j-\underset{12}{dd}A_j=&(\Omega^{\dot 0}_{jkh}+\Pi_{jkP}\Pi^{\dot 0}_{Ph}-\Pi_{jhP}\Pi^{\dot 0}_{Pk})\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_{\dot 0} \\ &+(\Omega^i_{\cdot jkh}+\Pi_{jkP}\Pi^{\dot i}_{Ph}-\Pi_{jhP}\Pi^{\dot i}_{Pk})\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_i \\ &+(\Pi_{jkP;\,h}-\Pi_{jhP;\,k}+\Pi_{jkQ}\Pi_{QPh}-\Pi_{jhQ}\Pi_{QPk} \\ &\qquad +g_{jk}\Pi_{\dot\infty Ph}-g_{jh}\Pi_{\dot\infty Pk})\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_P\,, \end{aligned}$$

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} \underset{21}{dd}A_P-\underset{12}{dd}A_P=&(\Pi^{\dot 0}_{Pk;\,h}-\Pi^{\dot 0}_{Ph;\,k}+\Pi^a_{Pk}\Pi^{\dot 0}_{ah}-\Pi^a_{Ph}\Pi^{\dot 0}_{ak} \\ &\qquad +\Pi_{PQk}\Pi^{\dot 0}_{Qh}-\Pi_{PQh}\Pi^{\dot 0}_{Qk})\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_{\dot 0} \\ &+(\Pi^{\dot i}_{Pk;\,h}-\Pi^{\dot i}_{Ph;\,k}+\Pi^{\dot i}_{Qk}\Pi_{QPh}-\Pi^{\dot i}_{Qh}\Pi_{QPk} \\ &\qquad +\Pi^{\dot 0}_{Pk}\delta^i_h-\Pi^{\dot 0}_{Ph}\delta^i_k)\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_i \\ &+(\Pi_{PQk;\,h}-\Pi_{PQh;\,k}+\Pi^a_{Pk}\Pi_{ahQ}-\Pi^a_{Ph}\Pi_{akQ} \\ &\qquad +\Pi_{PRk}\Pi_{RQh}-\Pi_{PRh}\Pi_{RQk})\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_Q\,, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$(3.11)\quad \underset{21}{d}\underset{}{d}A_j-\underset{12}{dd}A_j=\underset{21}{dd}(B_j^{\cdot\mu}A_\mu)-\underset{12}{dd}(B_j^{\cdot\mu}A_\mu)$$

$$=\left(B_{jkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^0_{\mu\nu\omega}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot aP}B_{P\lambda}B_{jkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\right)\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_{\dot 0}$$

$$+B_{\lambda jkh}^{i\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_i+B_{P\lambda}B_{jkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_P\,,$$

$$(3.12)\quad \underset{21}{dd}A_P-\underset{12}{dd}A_P=\left(B_{Pkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^0_{\mu\nu\omega}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot aQ}B_{Q\lambda}B_{Pkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\right)\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_{\dot 0}$$

$$+B_{\lambda Pkh}^{i\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_i+B_{Q\lambda}B_{Pkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\underset{1}{dx^k}\underset{2}{dx^h}A_Q\,.$$

Donc, en comparant les coefficients, on obtient, des (3.9) et (3.11),

$$(3.13)\quad B_{jkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^0_{\mu\nu\omega}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot a\lambda}B_{jkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Omega^{\dot 0}_{jkh}+\Pi_{jkP}\Pi^{\dot 0}_{Ph}-\Pi_{jhP}\Pi^{\dot 0}_{Pk}\,,$$

$$(3.14)\quad B_{\lambda jkh}^{i\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Omega^{i}_{\cdot jkh}+\Pi_{jkP}\Pi^{i}_{Ph}-\Pi_{jhP}\Pi^{i}_{Pk}\,,$$

$$(3.15)\quad B_{P\lambda}B_{jkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Pi_{jkP;\,h}-\Pi_{jhP;\,k}+\Pi_{jkQ}\Pi_{QPh}-\Pi_{jhQ}\Pi_{QPk}$$
$$+g_{jk}\Pi^{\cdot}_{\dot\infty Ph}-g_{jh}\Pi^{\cdot}_{\dot\infty Pk}\,,$$

et des (3.10) et (3.12)

$$(3.16)\quad B_{Pkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^0_{\mu\nu\omega}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot a\lambda}B_{Pkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Pi^{\dot 0}_{Pk;\,h}-\Pi^{\dot 0}_{Ph;\,k}+\Pi^{a}_{Pk}\Pi^{\dot 0}_{ah}$$
$$-\Pi^{a}_{Ph}\Pi^{\dot 0}_{ak}+\Pi_{PQk}\Pi^{\dot 0}_{Qh}-\Pi_{PQh}\Pi^{\dot 0}_{Qk}\,,$$

$$(3.17)\quad B_{\lambda Pkh}^{i\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Pi^{i}_{Pk;\,h}-\Pi^{i}_{Ph;\,k}+\Pi^{i}_{Qk}\Pi_{QPh}-\Pi^{i}_{Qh}\Pi_{QPk}$$
$$+\Pi^{\dot 0}_{Pk}\delta^{i}_{h}-\Pi^{\dot 0}_{Ph}\delta^{i}_{k}$$

$$(3.18)\quad B_{Q\lambda}B_{Pkh}^{\mu\nu\omega}\Omega^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Pi_{PQk;\,h}-\Pi_{PQh;\,k}+\Pi^{a}_{Pk}\Pi_{ahQ}-\Pi^{a}_{Ph}\Pi_{akQ}$$
$$+\Pi_{PRk}\Pi_{RQh}-\Pi_{PRh}\Pi_{RQk}\,.$$

Or, si l'on substitue les valeurs (1.6), (2.4), (2.6) et (3.7) dans l'équation (3.13), on obtient

$$(3.19)\quad B_{jkh}^{\mu\nu\omega}C^0_{\mu\nu\omega}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot a\lambda}B_{jkh}^{\mu\nu\omega}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$$

$$-\left[\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jk}\right]_{;h}$$

$$+\left[\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jh}\right]_{;k}$$

$$-\frac{1}{m-1}M_{jkP}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Ph}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{m-1}M_{jhP}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Pk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$$

$$=C^{\dot 0}_{jkh}-\left[\frac{1}{m-2}M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot k\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}g_{jk}\right]_{;h}$$

$$+\left[\frac{1}{m-2}M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot h\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}g_{jh}\right]_{;k}$$

$$+\frac{1}{m-1}M_{jkP}(M^{a}_{\cdot hP;\,a}+M^{a}_{\cdot hQ}L_{QPa})$$

$$-\frac{1}{m-1}M_{jhP}(M^{a}_{\cdot kP;\,a}+M^{a}_{\cdot kQ}L_{QPa}).$$

Dans le cas de l espace conforme à un espace euclidien, c'est-à-dire, dans le cas où les tenseurs $C^{0}_{\mu\nu\omega}$ et $C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ s'annulent tous les deux, nous avons déjà rencontré ces équations[1].

Cela étant, substituons cette fois (1.6), (2.4) et (3.8) dans (3.14), alors, on aura

$$
\begin{aligned}
(3.20)\quad & B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\left[\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jk}\right]\delta^{i}_{h}\\
&+\left[\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{jh}\right]\delta^{i}_{k}\\
&-g_{jk}\left[\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{ah}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{ah}\right]g^{ai}\\
&+g_{jh}\left[\frac{1}{m-2}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{ak}C^{\nu}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g_{ak}\right]g^{ai}\\
&=C^{i}_{\cdot jkh}-M^{\cdot\cdot\lambda}_{jk}M^{i}_{\cdot h\lambda}+M^{\cdot\cdot\lambda}_{jh}M^{i}_{\cdot k\lambda}\\
&\quad-\left[\frac{1}{m-2}M^{\cdot\cdot\lambda}_{ja}M^{a}_{\cdot k\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}g_{jk}\right]\delta^{i}_{h}\\
&\quad+\left[\frac{1}{m-2}M^{\cdot\cdot\lambda}_{ja}M^{a}_{\cdot h\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}g_{jh}\right]\delta^{i}_{k}\\
&\quad-g_{jk}\left[\frac{1}{m-2}M^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot h\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}\delta^{i}_{h}\right]\\
&\quad+g_{jh}\left[\frac{1}{m-2}M^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot k\lambda}-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}\delta^{i}_{k}\right].
\end{aligned}
$$

Ce sont les équations conformes de Gauss que nous avons déjà trouvées d'une autre manière[2]. Substituons cette fois (1.6) et

$$\Pi_{\dot\infty Pk}=\Pi^{\dot 0}_{Pk}=\frac{1}{m-1}(B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Pk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+M^{a}_{\cdot kP;\,a}+M^{a}_{\cdot kQ}L_{QPa})$$

dans (3.15), alors on aura

$$
\begin{aligned}
(3.21)\quad & B_{P\lambda}B^{\mu\nu\omega}_{jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{m-1}g_{jk}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Ph}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{m-1}g_{jh}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Pk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\\
&=M_{jkP;\,h}-M_{jhP;\,k}+M_{jkQ}L_{QPh}-M_{jhQ}L_{QPk}\\
&\quad+\frac{1}{m-1}g_{jk}(M^{a}_{\cdot hP;\,a}+M^{a}_{\cdot hQ}L_{QPa})\\
&\quad-\frac{1}{m-1}g_{jh}(M^{a}_{\cdot kP;\,a}+M^{a}_{\cdot kQ}L_{QPa})
\end{aligned}
$$

1) K. Yano et Y. Mutô: Sur le théorème fondamental..., déjà cité, (48).

2) K. Yano: Sur les équations de Gauss......, déjà cité, (3.14).

Ce sont les équations conformes de Codazzi[1]

Cela étant, substituons (1.6), (2.4) et (2.6) dans (3.16), alors on trouve

$$
\begin{aligned}
(3.22)\quad & B^{\mu\nu\omega}_{Pkh}C^{0}_{\mu\nu\omega}-\frac{1}{m}H^{a}_{\cdot a\lambda}B^{\mu\nu\omega}_{Pkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \\
& -\frac{1}{m-1}(B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Pk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})_{;h}+\frac{1}{m-1}(B^{\omega}_{\nu}B^{\mu\nu}_{Ph}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})_{;k} \\
& -\frac{1}{m-2}M^{a}_{\cdot kP}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{ah}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{m-2}M^{a}_{\cdot kP}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{ak}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \\
& -\frac{1}{m-1}L_{PQk}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Qh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+\frac{1}{m-1}L_{PQh}B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{Qk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} \\
& =\frac{1}{m-1}(M^{a}_{\cdot kP;a}+M^{a}_{\cdot kQ}L_{QPa})_{;h} \\
& -\frac{1}{m-1}(M^{a}_{\cdot hP;a}+M^{a}_{\cdot hQ}L_{QPa})_{;k} \\
& +\frac{1}{m-2}M^{a}_{\cdot kP}R_{ah}-\frac{1}{m-2}M^{a}_{\cdot hP}R_{ak} \\
& -\frac{1}{m-2}M^{a}_{\cdot kP}M^{\cdot\cdot\lambda}_{ab}M^{b}_{\cdot h\lambda}+\frac{1}{m-2}M^{a}_{\cdot hP}M^{\cdot\cdot\lambda}_{ab}M^{b}_{\cdot k\lambda} \\
& +\frac{1}{m-1}L_{PQk}(M^{a}_{\cdot hQ;a}+M^{a}_{\cdot hR}L_{RQa}) \\
& -\frac{1}{m-1}L_{PQh}(M^{a}_{\cdot kQ;a}+M^{a}_{\cdot kR}L_{RQa}).
\end{aligned}
$$

Nous avons aussi rencontré ces équations dans le cas de l'espace conforme à l'espace euclidien[2].

Les équations (3.17) ne donnent pas les nouvelles équations, ce sont les équations conformes de Codazzi.

En substituant finalement (1.6) dans (3.18), nous avons

$$
\begin{aligned}
(3.23)\quad B_{Q\lambda}B^{\mu\nu\omega}_{Pkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=L_{PQk;h}-L_{PQh;k}-M^{a}_{\cdot kP}M_{ahQ}+M^{a}_{\cdot hP}M_{akQ} \\
+L_{PRk}L_{RQh}+L_{PRh}L_{RQk},
\end{aligned}
$$

ce sont les équations conformes de Ricci.

1) K. Yano: Sur les équations de Codazzi ..., déjà cité, (2.5).

2) K. Yano et Y. Mutô: Sur le théorème fondamental..., déjà cité, (49).