PAPERS COMMUNICATED

84. *Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen.*

Von Hiraku TÔYAMA.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1943.)

André Weil hat in seiner bahnbrechenden Arbeit[1] die Theorie der hyperabelschen Funktionen begründet, indem er die zugrundeliegenden Bettischen Gruppen auf die Poincaréschen Fundamentalgruppen verallgemeinert. Im folgenden will ich die von ihm ohne Beweise ausgesprochenen Behauptungen und einige neue Sätze beweisen.

Satz 1. *Die komplexe Dimension d der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ aller Darstellungen r-ter Ordnung $(r>1)$ der Fundamentalgruppe der Riemannschen Fläche vom Geschlecht p $(p>1)$ und Signatur $n(P)$ ist durch*

$$d=r^2(2p-1)+1+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta} \qquad \textit{gegeben,}$$

wo $N_{\mu\alpha}$ die Anzahl der Eigenwerte $e^{\frac{2\pi i\alpha}{n_\mu}}$ der Matrix C_μ bezeichnet.

Beweis. Eine Darstellung ist durch die $2p+l$ Erzeugenden $A_1, A_2 \dots A_p$, $B_1, B_2 \dots B_p$, $C_1, C_2 \dots C_l$ völlig bestimmt, under denen die folgende definierende Relationen bestehen

$$A_1^{-1}B_1^{-1}A_1B_1A_2^{-1}B_2^{-1}A_2B_2 \dots A_pB_pA_p^{-1}B_p^{-1}C_1 \dots C_l=E, \quad C_\mu^{n_\mu}=E\,.$$

Nach einem Satze von K. Shoda[2], dass jede Matrix von Determinante 1 als Kommutator zweier Matrizen dargestellt wird, kann man die $2p-2$ Matrizen $A_2, A_3 \dots A_p$, $B_2, B_3 \dots B_p$ und $C_1, C_2 \dots C_l$ (unter Bedingungen $C_\mu^{n_\mu}=E$) beliebig wählen. Zunächst wollen wir die Dimension der C_μ bestimmen, wenn $N_{\mu\alpha}(\alpha=0, \dots n_\mu^{-1})$ vorgegeben sind. Wegen der Bedingung $C_\mu^{n_\mu}=E$, C_μ kann in Diagonalform transformiert werden.

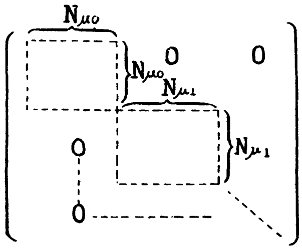
$$F^{-1}C_\mu F=\begin{pmatrix} \overbrace{1\ \ddots\ 1}^{N_{\mu 0}} & & & 0 \\ & \overbrace{\omega\ \ddots\ \omega}^{N_{\mu 1}} & & \\ & & \overbrace{\omega^2\ \ddots\ \omega^2}^{N_{\mu 2}} & \\ 0 & & & \ddots\ \omega^{n_\mu} \end{pmatrix} \qquad \omega=e^{\frac{2\pi i}{n_\mu}}$$

---

1) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de mathématiques pures et appliqées, **17** (1938), 47-87.

2) K. Shoda, Einige Sätze über Matrizen, Japanese Journal of Mathematics, **13** (1937), 361-365.

Nun die Matrizen welche $F^{-1}C_\mu F$ invariant lassen, sind von der folgenden Form



deren Dimension $N^2_{\mu_0}+N^2_{\mu_1}+\cdots+N^2_{\mu,n_\mu-1}$ ist, so ist die Dimension von C_μ um desto kleiner als r^2, d. h.

$$r^2-(N^2_{\mu_0}+N^2_{\mu_1}+\cdots+N^2_{\mu n_\mu-1})=(N_{\mu_0}+N_{\mu_1}+\cdots+N_{\mu n_\mu-1})^2$$
$$-(N^2_{\mu_0}+N^2_{\mu_1}+\cdots+N^2_{\mu n_\mu-1})=2\sum_{\alpha<\beta}N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}\,.$$

Nunmehr kommen wir zur Bestimmung der Dimensionszahl von A_1 und B_1, wo die Hauptschwierigkeit dieser Arbeit liegt. Setzen wir $S=A_2^{-1}B_2^{-1}A_2B_2\ldots A_p^{-1}B_p^{-1}A_pB_pC_1\cdots C_l$, so ist es genug, die Matrizengleichungen $A_1^{-1}B_1^{-1}A_1B_1=S$, $|S|=1$ zu auflösen. Die Matrix S kann so gewählt werden, dass ihr Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ldots\lambda_r$ alle verschieden sind und den Ungleichungen $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m}\neq 1$ für jede $m<r$, genügen, und selbstverständlich die Menge der $A_2\ldots A_p$, $B_2\ldots B_p$, $C_1\cdots C_l$ die solche $\lambda_1, \lambda_2\ldots\lambda_r$ gibt, ist offen, daher bei der Bestimmung der Dimension, kann man nur solchen Fall in Betracht ziehen. Wenn S auf Diagonalform

$$G^{-1}SG=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r\end{pmatrix}$$

transformiert wird, haben die Matrizengleichungen folgende Form

$$A_1^{-1}B_1^{-1}A_1B_1=S\,,\qquad B_1^{-1}A_1B_1=A_1S\,,$$

so haben A_1 und A_1S die gleichen charakteristischen Polynome

(1) $$|A_1-xE|\equiv|A_1S-xE|\,.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhalten wir die $r-1$ Gleichungen

(2)
$$\begin{aligned}
&f_1(A_1)=\sum a_{ii}-\sum\lambda_i a_{ii}=0\\
&f_2(A_2)=\sum(a_{ik}a_{ki}-a_{ii}a_{kk})-\sum\lambda_i\lambda_k(a_{ik}a_{ki}-a_{ii}a_{kk})=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{r-1}(A_1)=0\,,
\end{aligned}$$

so ist es klar, dass die Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit nicht kleiner als $r^2-(r-1)$ ist, aber man kann nicht ohne weiteres schliessen, dass sie gleich sind, denn die $r-1$ Gleichungen mögen voneinander abhängig sein. Diese Schwierigkeit wollen wir durch topologische Überlegungen beiseitebringen. Zuerst sei P der komplexe projektive Raum (r^2-1)-ter Dimension von $a_{ik}(i, k=1, \dots r)$. In diesem Raume ist die algebraische Mannigfaltigkeit A_1, die den Gleichungen (2) genügt, ein Zyklus[1]. Der Schnitt von A_1 und linearen Mannigfaltigkeit $L_{r-1}\big(a_{ik}=0(i\neq k)\big)$ ist $(r-1)!$ Punkte, denn wenn A_1 Diagonalform besitzt, so bedeutet die Gleichung (1), dass die Wurzeln beider Polynomen gleich sind, so ist

$$a_{ii}=\lambda_k a_{kk}$$

und wegen der Bedingungen $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m}\neq 1$, sind alle Wurzeln lauter verschieden, und gibt Permutation von Nummer i die $(r-1)!$ Lösungssysteme. Wenn die Dimension der Mannigfaltigkeit A_1 grösser als r^2-r+1 wäre, so würde sie mit der linearen Mannigfaltigkeit $L'_{r-1-\varepsilon}$ von kleinerer Dimension als L_{r-1} in endlicher Punkten schneiden, und weil $L'_{r-1-\varepsilon}$ ist homolog einer $L''_{r-1-\varepsilon}$ welche in L_{r-1} liegt, so mit L_{r-1} unendliche Schnittpunkte; d. h. gegen die oben bewiesene Tatsache. Dann ist die Dimension von A_1 genau r^2-r+1. Wenn in bezug auf einer Matrix A_1 zwei Matrizen B_1 und B'_1 vorkommen,

$$B_1^{-1}A_1B_1=A_1S\,,$$

$$B_1'^{-1}A_1B_1'=A_1S\,,$$

so ist $B_1^{-1}B'=T$ mit A_1 vertauschbar

$$TA=AT\,.$$

Nach dem bekannten Satze der Matrizentheorie[2] ist die Dimension der T genau r. Durch Summation ergibt sich

$$d=r^2(2p-2)+r^2-r+1+r+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta}N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}=r^2(2p-1)+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta}N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}+1.$$

Satz 2. *Wenn zwei unitäre Darstellungen der Fundamentalgruppe äquivalent* (im Sinne von Weil) *sind, so sind sie ähnlich* (semblable).

Beweis. Seien zwei unitäre Darstellungen $U_1(s)$, $U_2(s)$ äquivalent, d. h.

$$U_1(s)M^s=MU_2(s)\,,\quad M=(u_{ik}+\sqrt{-1}\,U_{ik})\quad (i=1,\dots r,\ k=1,\dots r)\,,$$

wo M die Matrizen ist, die überall auf universellen Überlagerungsfläche endlich ist, dann ist die Normalspur spur $(\bar{M}'M)$ gegenüber der Fundamentalgruppe invariant,

1) B. L. van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann. **102** (1927), 337–362.

2) Ch. Hopkins, An elementary Proof of the Theorem that..., Tôhoku Mathematical Journal, **39** (1934), 359–360.

$$\text{spur}\,(\bar{M}'M)^s = \text{spur}\,(\bar{M}'M)\,.$$

Deshalb ist sie auf der geschlossenen Riemannschen Fläche eindeutig und noch überdies subharmonisch, daher muss sie konstant sein.

$$\text{spur}\,(\bar{M}'M) = \sum_{i,k} (u_{ik}^2 + v_{ik}^2) = \text{konstant.}$$

Operiert man den Laplaceschen Operator $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$0 = \Delta \sum (u_{ik}^2 + v_{ik}^2) = 2\sum (u_{ik}\Delta u_{ik} + v_{ik}\Delta v_{ik})$$
$$+2\sum \left\{ \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{ik}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{ik}}{\partial y}\right)^2 \right\},$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \frac{\partial u_{ik}}{\partial y} = \frac{\partial v_{ik}}{\partial x} = \frac{\partial v_{ik}}{\partial y} = 0\,,$$

damit sind u_{ik}, v_{ik} konstant, folglich ist M konstant.

Satz 3. *Die topologische Dimension aller unitären Darstellungen ist*

$$r^2(2p-1) + 1 + 2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha} N_{\mu\beta}\,.$$

Beweis. Ersetzt man in

$$A_l = \frac{1 - iH_l}{1 + iH_l}\,,\quad B_l = \frac{1 - iH_l'}{1 + iH_l'}\,,\quad C_k = \frac{1 - iH_k''}{1 + iH_k''}\qquad \text{(unitäre Beschränkung !)}$$

dann ist diese Mannigfaltigkeit reeller Teil von $\mathfrak{M}$[1], so ist die damit gewonnene Gleichungen sind unabhängig in komplexen Veränderlichen nach Satze 1, um so mehr in reellen Veränderlichen. Wie leicht ersichtlich, haben solche Gleichungen wenigstens ein Lösungssystem, daher ist die topologische Dimension gleich der komplexe Dimension.

Satz 4. *Die topologische Dimension aller unitären Darstellungsklassen ist, wenn* $r > 1$, $p > 1$

$$r^2(2p-2) + 2 + 2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha} N_{\mu\beta}\,.$$

Beweis. Zunächst beweisen wir, dass wenn zwei unitäre Darstellungen ähnlich sind, d. h.

$$K^{-1}U_1(s)K = U_2(s)\,, \tag{3}$$

die Matrix K durch die unitäre ersetzt werden kann. Denn wenn man $K = V_1 D V_2$ schreibt[2], wo V_1, V_2 unitär und D Diagonalmatrix mit reellen positiven Elementen $d_1, d_2, \dots d_r$ sind, erhält man aus (3) durch Multiplikation mit ihrer Hermiteschen konjugierten Matrix

$$\left(V_1^{-1}U_1(s)V_1\right)D^2 = D^2\left(V_1^{-1}U_1(s)V_1\right).$$

1) S. Lefschetz, Topology, 1930, American Mathematical Society Colloquium Publications 1930. S. 363.

2) C. C. Macduffee, The Theory of Matrices, Berlin, 1933, S. 78.

Wenn U_1 irreduzibel ist, so ist $d_1^2=d_2^2=\cdots=d_r^2$, nämlich D kann durch Einheitsmatrix ersetzt werden. Und wenn U_1 reduzibel ist, kann man ihn in irreduzible Bestandteile zerlegen, und schliessen dass die Elemente, die demselben Bestandteile gehören, gleich sind und so alle gleich gewählt werden können. Wie man leicht sieht, ist die Menge welche die reduziblen Darstellungen bilden, nirgendsdicht. Daher ist es genug, bei der Bestimmung der Dimensionszahl, nur die irreduziblen Darstellungen zu betrachten. Wenn eine irreduzible Darstellung gegenüber der Transformation $K^{-1}UK$ invariant ist, so ist es notwendig, dass K die skalare Matrix $\begin{pmatrix} \varkappa_1 & & & \\ & \varkappa_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varkappa_1 \end{pmatrix}$ ist. Denn K sei auf Diagonalform transformiert,

$$K=\begin{pmatrix} \varkappa_1 & & & 0 \\ & \varkappa_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varkappa_r \end{pmatrix}$$

und $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \cdots \varkappa_r$ nicht alle gleich, so muss U reduzibel sein, d. h. gegen die Voraussetzung. Somit ist die Dimension einer Darstellungsklasse genau r^2-1, deshalb ist die Dimension aller unitären Darstellungsklassen gleich

$$r^2(2p-1)+1+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}-(r^2-1)=r^2(2p-2)+2+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}\,.$$

Dies ist gleich der Dimensionszahl aller Darstellungsklassen, die von A. Weil berechnet war.[1]

1) A. Weil, loc. cit.