107. Über die masstreuen Abbildungen in Produkträumen.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

Es sei $(\Omega, \boldsymbol{B}, m)$ ein Massraum mit $m(\Omega)=1$: also die Zusammenfassung eines abstrakten Raumes Ω, eines Borelschen Mengenkörpers $\boldsymbol{B}$ von Teilmengen von Ω und eines vollständig-additiven Masses m auf $\boldsymbol{B}$; und T sei eine masstreue Abbildung auf Ω. $(\Omega', \boldsymbol{B}', m')$ sei ferner ein anderer Massraum und T' sei eine masstreue Abbildung auf Ω'. Wir definieren auf dem Produktraum

(1) $$\bar{\Omega}=\Omega \times \Omega', \quad \bar{\Omega} \ni \bar{\omega}=(\omega, \omega'), \quad \omega \in \Omega, \quad \omega' \in \Omega'$$

die Abbildung $\bar{T}=T \times T'$ durch

(2) $$\bar{T}\bar{\omega}=(T\omega, T'\omega'),$$

dann ist $\bar{T}$ eine masstreue Abbildung auf dem Produktraum $(\bar{\Omega}, \bar{\boldsymbol{B}}, \bar{m})$, wobei $\bar{\boldsymbol{B}}$ der kleinste $E \times E'$ $(E \in \boldsymbol{B},\ E' \in \boldsymbol{B}')$ enthaltende Borelsche Mengenkörper und $\bar{m}$ das Produktmass $m \times m'$ auf $\bar{\boldsymbol{B}}$ ist. In der vorangehenden Note haben wir uns mit dem Fall beschäftigt, wo T vom Mischungstypus im witerein Sinne ist.[1] In der vorliegenden Note soll der allgemeine Fall spektraltheoretisch untersucht werden.

Es sei G die additive Gruppe (mod. 2π) aller Eigenwerte λ von T: $x_\lambda(T\omega)=e^{i\lambda}x_\lambda(\omega)$, $\left(0 \neq x_\lambda \in L^2(\Omega)\right)$. Entsprechend sei G' bzw. $\bar{G}$ die Gruppe der Eigenwerte von T' bzw. $\bar{T}$.

Satz 1. $\bar{G}$ ist das Kompositum von G und G':

$$\bar{G}=\{G, G'\}=\{\lambda+\lambda'\,;\ \lambda \in G,\ \lambda' \in G'\}.$$

Satz 2. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\bar{T}$ ergodisch ist, ist folgende:

(i) *T und T' sind ergodisch,*

(ii) $G \frown G'=0$.[2]

Korollar 1. Falls T und T' vom Mischungstypus im weiteren Sinne (d. h. T und T' ergodisch und $G=G'=0$) sind, so ist auch $\bar{T}$ vom Mischungstypus im weiteren Sinne.

Korollar 2. Falls T vom Mischungstypus ist, so ist für jede

---

1) Über die masstruen Abbildung vom Mischungstypus im weiteren Sinne, diese Proc., **19** (1943), 518–522.

2) Ein bekannter Spezialfall ist der folgende: es seien Ω bzw. Ω' die reelle Menge (0.1], $\boldsymbol{B}$ bzw. $\boldsymbol{B}'$ die Gesamtheit aller Borelschen Menge auf (0,1] und m bzw. m' das Lebesguesche Mass. Es seien ferner $T\omega=\omega+\lambda$ (mod. 1) und $T'\omega'=\omega'+\lambda'$ (mod. 1). Die Bedingungen (i), (ii) im Satz 2 sind folgende: (i) λ und λ' sind irrational, (ii) λ/λ' ist irrational. Denn G bzw. G' ist in diesem Falle $\{n\lambda'$ (mod. 1)$\}$ bzw. $\{n\lambda'$ (mod. 1)$\}$ und die Bedingung $G \frown G'=0$ bedeutet, dass $m\lambda=n\lambda'$ $(m, n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ niemals gilt.

ergodische Abbildung T' die Produktabbildung $\bar{T}$ auch ergodisch, und umgekehrt.[1]

Beweis des Satzes 1. (i) Es sei $\bar{\lambda}=\lambda+\lambda'$, $\lambda' \in G$, $\lambda' \in G'$. Dann gibt es $x_\lambda \in L^2(\Omega)$ und $x'_{\lambda'} \in L^2(\Omega')$ mit $x_\lambda(T\omega)=e^{i\lambda}x_\lambda(\omega)$ und $x'_{\lambda'}(T'\omega') =e^{i\lambda'}x'_{\lambda'}(\omega')$. Für $\bar{x}=x_\lambda \cdot x'_{\lambda'} \in L^2(\bar{\Omega})$ gilt also $\bar{x}(\bar{T}\bar{\omega})=x_\lambda(T_\omega)\cdot x'_{\lambda'}(T'\omega') =e^{i(\lambda+\lambda')}\bar{x}(\bar{\omega})$. Mithin ist $\bar{G}\supset \{G, G'\}$.

(ii) Wie üblich sei die Spektralzerlegung des unitären Operators U $\big(Ux(\omega)=x(T\omega)\big)$ auf $L^2(\Omega)$:

$$U=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}dE_t\,, \tag{3}$$

und entsprechend für T' und T seien.

$$U'=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}dE'_t\,, \qquad \bar{U}=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}d\bar{E}_t\,. \tag{3'}$$

Setzen wir

$$v_x(t)=\| E_t x \|^2, \quad v'_{x'}(t)=\| E'_t x' \|^2, \quad v_x(t)=\| \bar{E}_t \bar{x} \|^2 \tag{4}$$

für $x \in L^2(\Omega)$, $x' \in L^2(\Omega)$ und $\bar{x} \in L^2(\bar{\Omega})$, so gilt

$$(Ux, x)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}dv_x(t)\,, \quad (U'x', x')=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}dv'_{x'}(t)\,, \tag{5}$$

$$(\bar{U}\bar{x}, \bar{x})=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}d\bar{v}_x(t)\,,$$

Insbesondere gilt für $\bar{x}=x\cdot x'$ $\big(x \in L^2(\Omega),\ x' \in L^2(\Omega')\big)$

$$\bar{U}\bar{x}=(Ux)\cdot(U'x'), \quad (\bar{U}\bar{x}, \bar{x})=(Ux, x)\cdot(U'x', x')\,, \tag{6}$$

mithin

$$(\bar{U}\bar{x}, \bar{x})=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}dv_x(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+t')}dv_x(t)dv'_{x'}(t'),,$$

und folglich

$$v_{\bar{x}}(t)=\int_{-\pi}^{\pi} v_x(t-s)dv'_{x'}(s)=\int_{-\pi}^{\pi} v'_{x'}(t-s)dv_x(s)\,. \tag{7}$$

Aus (7) können wir folgendes schliessen: $\bar{\lambda}$ ist dann und nur dann ein Unstetigkeitspunkt von $\bar{v}_x(t)$, wenn λ mit einem Unstetigkeitspunkt λ von $v_x(t)$ und mit einem Unstetigkeitspunkt λ' von $v'_{x'}(t)$ in der Form $\bar{\lambda}=\lambda+\lambda'$ dargestellt wird. Genauer gilt

$$\begin{aligned} &v_x(\bar{\lambda}+0)-\bar{v}_x(\bar{\lambda}-0) \\ &\quad =\textstyle\sum_{\bar{\lambda}=\lambda+\lambda'}\big(v_x(\lambda+0)-v_x(\lambda-0)\big)\big(v'_{x'}(\lambda'+0)-v'_{x'}(\lambda'-0)\big)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Setzen wir ferner

$$E^\lambda=E_{\lambda+0}-E_{\lambda-0}\,, \quad E'^\lambda=E'_{\lambda+0}-E'_{\lambda-0}\,, \quad \bar{E}^\lambda=\bar{E}_{\lambda+0}-\bar{E}_{\lambda-0}\,, \tag{9}$$

1) Korollar 2 ist nichts anders als Satz 1 in der vorangehenden Note.

so ist $v_x(\lambda+0)-v_x(\lambda-0)=\|E^\lambda x\|^2$ und $G=\{\lambda;\ E^\lambda>0\}$. Entsprechendes gilt für G' und $\bar{G}$. Also folgt aus (4), (8), dass die Unstetigkeitspunkte von $\bar{v}_{\bar{x}}(t)$ für $\bar{x}=x\cdot x'$ in $\{G, G'\}$ enthalten sind.

Da jedes $\bar{y}\in L^2(\bar{\Omega})$ in der Form

$$(10)\quad \lim_{n\to\infty}\|\bar{y}-\textstyle\sum_{i=1}^{r_n}\bar{x}_{ni}\|=0,\quad \bar{x}_{ni}=x_{ni}\cdot x'_{ni},\quad x_{ni}\in L^2(\Omega),\quad x'_{ni}\in L^2(\Omega')$$

dargestellt wird, gilt für $\bar{y}\in L^2(\bar{\Omega})$ mit $\bar{E}^\lambda\bar{E}=\bar{y}\neq 0$

$$0<\|\bar{y}\|^2=\|\bar{E}^\lambda\bar{y}\|^2=\lim_{n\to\infty}\|\bar{E}^\lambda(\textstyle\sum_{i=1}^{r_n}\bar{x}_{ni})\|^2\leqq\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{r_n}\left(\bar{v}_{\bar{x}_{ni}}(\lambda+0)-\bar{v}_{\bar{x}_{ni}}(\lambda-0)\right).$$

Also gibt es ein n und i mit $\bar{v}_{\bar{x}_{ni}}(\lambda+0)-\bar{v}_{\bar{x}_{ni}}(\lambda-0)>0$ und folglich $\lambda\in\{G, G'\}$. Wir haben also $\bar{G}\subset\{G, G'\}$ bewiesen.

Beweis des Satzes 2. (i) Falls T oder T' nicht ergodisch ist, dann ist $\bar{T}$ ersichtlich nicht ergodisch. Es seien also T und T' ergodisch, und $G\frown G'\ni\lambda\neq 0$. Dann gibt es $x_\lambda\subset L^2(\Omega)$ und $x'_\lambda\in L^2(\Omega')$ mit $Ux_\lambda=e^{i\lambda}x_\lambda$ und $U'x'_\lambda=e^{i\lambda}x'_\lambda$. Da T' ergodisch ist, ist $|x'_\lambda(\omega')|=$ Konst. fast überall, und daher gilt $\bar{U}\bar{x}=\bar{x}$ für $\bar{x}=x_\lambda\cdot(x'_\lambda)^{-1}\neq$Konst. Dies zeigt, dass $\bar{T}$ nicht ergodisch ist.

(ii) Es seien T und T' ergodisch und $G\frown G'=0$. Dann ist

$$v_x(+0)-v_x(-0)=\|E^0x\|^2=|(x,1)|^2,\quad v'_{x'}(+0)-v'_{x'}(-0)=\|E'^0x'\|^2=|(x',1)|^2.$$

Daraus ergibt sich nach (8) und $G\frown G'=0$

$$\begin{aligned}(11)\quad \bar{v}_{\bar{x}}(+0)-\bar{v}_{\bar{x}}(-0)&=\left(v_x(+0)-v_x(-0)\right)\left(v'_{x'}(+0)-v'_{x'}(-0)\right)\\ &=|(x,1)\cdot(x',1)|^2=|(\bar{x},1)|^2\end{aligned}$$

für $\bar{x}=x\cdot x'$. (11) zeigt, dass

$$(12)\qquad \bar{E}^0\bar{x}=(\bar{x},1)\cdot 1$$

für $\bar{x}=x\ \ x'$, also für $\bar{x}=\sum_{i=1}^{r}x_i\cdot x'_i$ $\left(x_i\in L^2(\Omega),\ x'_i\in L^2(\Omega')\right)$ gilt.

Wäre $\bar{T}$ nicht ergodisch, dann gäbe es ein $\bar{y}\in L^2(\bar{\Omega})$ mit

$$\bar{U}\bar{y}=\bar{y}\neq 0\qquad\text{und}\qquad(\bar{y},1)=0\,.$$

Für die Folge $\{\bar{x}_{ni}\}$ in (10) gilt nach (12)

$$\lim_{n\to\infty}\|\bar{E}^0(\textstyle\sum_{i=1}^{r_n}\bar{x}_{ni})\|^2=\lim_{n\to\infty}|(\sum_{i=1}^{r_n}\bar{x}_{ni},1)|^2=|(\bar{y},1)|^2=0\,,$$

und andererseits gilt

$$\lim_{n\to\infty}\|\bar{E}^0(\textstyle\sum_{i=1}^{r_n}\bar{x}_{ni})\|^2=\|\bar{E}^0\bar{y}\|^2=\|\bar{y}\|^2>0\,,$$

was ein Widerspruch ist. Daher muss $\bar{T}$ ergodisch sein.