104. *Über die allgemeinen algebraischen Systeme VII.**

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, Nov. 12, 1943.)

§ 21 *Graduierter Verband.* Ein Verband L heisst *quasigraduiert* nach der Vereinigung, wenn jedem Quotient a/b in L eine reelle (einschließlich unendliche) Zahl $d(a/b) \geq 1$ zugeordnet ist, die den folgenden Bedingungen erfüllt: 1) $d(a/b) \leq d(a/c)$, $d(b/c) \leq d(a/c)$, $d(a/c) \leq d(a/b) d(b/c)$ für $a \geq b \geq c$; 2) $d(a \cup a'/b) \leq d(a/b) d(a'/b)$ für $a, a' \geq b$; 3) $d(a/a)$ ist endlich. Damit dual ist der Begriff der Quasigraduierung nach dem Durchschnitt, der durch 1), 3) und 2′) $d(b/a \cap a') \leq d(b/a) d(b/a')$ für $b \geq a, a'$ definiert wird. Eine Quasigraduierung heisst eine *Graduierung*, wenn $d(a/b) < d(a/c)$ für $a \geq b > c$ und $d(b/c) < d(a/c)$ für $a > b \geq c$.

In einem dualen Hauptideal $[b]$ eines nach der Vereinigung quasigraduierten Verbandes L bilden die sämtlichen Elemente a mit endlichen $d(a/b)$ ein Ideal L_b, da nach 1) $d(a \cap a'/b) \leq d(a/b)$ für jedes a' aus $[b]$ ist. Ist $a \in L_b$, so ist ferner nach 1) $L_a \leq L_b$. Wenn man umgekehrt für jedem dualen Hauptideal $[b]$ ein Ideal L_b angeben kann, so daß $L_a \leq L_b$ für $a \in L_b$ ist, so kann man L stets quasigraduieren. Man setze z. B. $d(a/b) = 1$ für $a \in L_b$, sonst $d(a/b) = \infty$. Für die folgenden Untersuchungen gebrauchen wir nur die Möglichkeit der Bestimmung der Ideale L_b, also nur die Quasigraduierbarkeit des Verbandes.

Es sei nun L ein nach der Vereinigung quasigraduierter Verband, $\mathfrak{L} = \{b_i\}$ eine Untermenge von L und $a \geq b_i$ für jedes i. Gibt es $b = b_1 \cup \cdots \cup b_r$ mit endlichem $d(a/b)$, so heisst a algebraisch über $\mathfrak{L}$. Dann gilt: 1) b_i ist algebraisch über $\mathfrak{L}$. 2) Ist a algebraisch über $\mathfrak{L}$ und ist jedes Element aus $\mathfrak{L}$ algebraisch über einer Untermenge $\mathfrak{L}$, so ist a algebraisch über $\mathfrak{L}$. Ist nämlich $d(a/b)$ mit $b = b_1 \cup \cdots \cup b_r$ endlich und ist $d(b_i/c_i)$ mit $c = \bigcup_j c_{ij}$ endlich, so ist $d(b_i/c)$ mit $c = \bigcup_{i,j} c_{ij}$ nach der Voraussetzung 1) endlich, also ist $d(b/c)$ nach 2) endlich, folglich ist $d(a/c)$ nach 1) endlich.

Der Verband aller Untergruppen einer Gruppe wird graduiert nach dem Durchschnitt, wenn $d(A/B)$ für Untergruppen A, B den Index von B in A bedeutet. Der Verband aller Normalteiler wird dann zugleich nach der Vereinigung graduiert. Im Fall der Abelschen Gruppe ist also der Verband aller Untergruppen sowohl nach dem Durchschnitt als auch nach der Vereinigung graduiert.

Ist Ω ein Körper, so wird der Verband aller Unterkörper von Ω graduiert nach der Vereinigung, wenn $d(K_1/K_2)$ für Unterkörper $K_1 \geq K_2$ den Grad von K_1 über K_2 bedeutet. Ist Ω ein Intergritätsbereich, so wird der Verband aller Unterbereiche von Ω quasigraduiert

---

* I-VI in Proc. **17** (1941), 323-327; **18** (1942), 179-184, 227-232, 276-279; **19** (1943), 120-124, 259-263.

nach dar Vereinigung, wenn $d(I_1/I_2)$ für Unterbereiche $I_1 \geqq I_2$ den Grad des Quotientenkörpers von I_1 ubei den von I_2 bedeutet.

Es sei noch bemerkt, daß der Begriff der Graduierung in enger Zusammenhang mit dem Begriff der Metrisierung steht. Gilt nämlich die schärfere Bedingung 2'') $d(a \cup a/b)\, d(a \cap a'/b) = d(a/b)\, d(a'/b)$, so bedeutet $\log d(a/b) = m(a)$ die Quasimetrik bzw. die Metrik von L_b im üblichen Sinne. Ist umgekehrt ein Ideal L_b von $[b]$ durch $m(a)$ quasimetrisiert bzw. metrisiert, so setze man $d(a/b) = e^{m(a)}$, $d(a/a') = d(a/b)$ $d(a'/b)$ für $a \geqq a'$ in L_b und sonst $d(a/b) = \infty$. Dann erhält man eine Quasigraduierung bzw. eine Graduierung mit der Bedingung 2'') von $[b]$.

§ 22 *Algebraische Abhängigkeit.* Es sei Ω ein algebraisches System. Der Verband aller Untersysteme von Ω sei quasigraduiert nach der Vereingung. Ist $d(\mathfrak{L}/\mathfrak{L})$ für zwei Untersysteme $\mathfrak{L} \geqq \mathfrak{L}$ endlich, so heisst $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung von $\mathfrak{L}$. Ein Element a heisst algebraisch über b, wenn a mindestens in einer endlichen Erweiterung von $\mathfrak{L}$ enthalten ist, also, wenn a und $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung von $\mathfrak{L}$ erzeugt. Ein nicht algebraisches Element heisst transzendent.

Es sei nunmehr Ω ein primitives A-algebraisches System, B eine Untermenge von Ω. Ist ein Element a algebraisch über einem durch eine endliche Untermenge von B erzeugten System, so heisst a *algebraisch* über B. Dann ist a sicher algebraisch über dem durch B erzeugten System. Die Umkehrung kann man aber nicht behaupten. Nach § 21 gelten: 1) Ist $a \in B$, so ist a algebraische über B. 2) Ist a algebraisch über B und ist jedes Element aus B algebraisch über C, so ist a algebraische über C.

Ein Element a heisst von einer Untermenge E von Ω *abhängig*, wenn es eine Relation zwischen a und einer endlichen Untermenge F von E gibt, die mit keiner Relation zwischen den Elementen von F äquivalent ist. Gibt es keine solche Relation, so heisst a von E unabhängig. Ist a von einer Untermenge von E abhängig, so ist a sicher von E abhängig. Eine Untermenge E heisst unabhängig, wenn jedes Element von E vom Komplement unabhängig ist. E heisst dagegen abhängig, wenn mindestens ein Element vom Komplement abhängig ist. Dann und nur dann ist E unabhängig, wenn das durch E erzeugte, Untersystem $\{E\}$ von Ω das durch E erzeugte freie System ist. Ist nämlich $\{E\}$ das durch E erzeugte freie System, so ist E ersichtlich unabhängig. Ist $\{E\}$ nicht frei, so gibt es eine Relation $f(a_1 \dots a_r)$ mit wenigsten Elementen. Dann ist a_1 von $a_2, \dots, a_r$, also vom Komplement abhängig, Man kann auch analog beweisen: Ist E wohlgeordnet, so ist E dann und nur dann unabhängig, wenn jedes Element von seinem Abschnitt unabhängig ist.

Ersichtlich gilt: 1) Ist $a \in E$, so ist a von E abhängig. Man beweist auch leicht: 3) Ist a von $b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$ abhängig, aber von $b_1, \dots, b_{n-1}$ unabhängig, so ist b_n von $b_1, \dots, b_{n-1}, a$ abhängig. Unter den Relationen, die die Abhängigkeit des a vón $b_1, \dots, b_n$ bedeuten, nehmen wir eine mit wenigsten Elemente an. Es sei $f(b_1, \dots b_r, b_n, a)$ eine solche Relation, f enthält stets b_n, da a von $b_1, \dots, b_{n-1}$ unabhängig ist. Daher ist b_n von $b_1, \dots, b_{n-1}, a$ abhängig.

Wir setzen nun voraus: Der Verband aller Untersysteme von Ω sei quasigraduiert und ein Element a sei dann und nur dann von E abhängig, wenn a über E algebraisch ist, Dann spricht man von der *algebraischen Abhängigkeit.* Dann gelten die folgenden drei Grundsätze:[1] I. *Liegt a in E, so ist a algebraisch abhängig von E.* II. *Ist a von E und jedes Element aus E von E' algebraisch abhängig, so ist a algebraisch abhängig von E'.* III. *Ist a von $b_1, \cdots, b_n$ algebraisch abhängig, aber von $b_1, \cdots, b_{n-1}$ algebraisch unabhängig, so ist b_n algebraisch abhängig von $b_1, \cdots, b_{n-1}, a$.* Nach diesen Grundsätze kann man bekanntlich die Steinitzsche Theorie[2] der algebraischen Abhängigkeit aufbauen, wenn man beachtet, daß jede algebraisch abhängig Menge stets eine algebraisch abhängige endliche Untermenge besitzt. Nach II. kann man auch leicht schließen: Ist a von E algebraisch abhängig, so ist a von einer endlichen unabhängigen Untermenge von E algebraisch abhängig.

Ist insbesondere $d(\mathfrak{L}/\mathfrak{L})$ für Untersysteme $\mathfrak{L} \geq \mathfrak{L}$ von Ω nur im Fall $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$ endlich, so spricht man von der *linearen Abhängigkeit.* Diese Definition kann man auch folgendermassen ausdrücken. Man spricht von der linearen Abhängigkeit, wenn nur die Elemente des durch E erzeugten Systems algebraisch abhängig von E sind. Ist nämlich a linear abhängig von E, so ist a algebraisch über das durch E erzeugten System $\{E\}$, also liegt a in $\{E\}$. Ist umgekehrt jedes über E algebraisches Element im durch E erzeugten System enthalten, so folgt $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$ daraus, daß $d(\mathfrak{L}/\mathfrak{L})$ endlich ist.

Ist Ω eine Abelsche Gruppe, so bilden die Untergruppen von Ω einen nach der Vereinigung graduierten Verband und unsere Definition der algebraischen Abhängigkeit reduziert sich auf die übliche Definition der "linearen Abhängigkeit".

Ist Ω ein Erweiterungskörper eines Körpers K, so fassen wir Ω als ein Ring mit dem Abbildungssystem K auf. Dann bilden die K enthaltenden Ringe in Ω einen nach der Vereinigung quasigraduierten Verband. Unsere Definition der algebraischen Abhängigkeit reduziert sich dann auf die übliche Definition der algebraischen Abhängigkeit in der Körpertheorie.

---

1) B. L. van der Wärden, Moderne Algebra 1, 2. Aufl. 105.

2) E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journal f. reine u. angewandte Math. **137** (1910), 167-309.