126. Über die Pellsche Gleichung.

Von Sigekatu KURODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität, Nagoya.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

Ein Satz aus der klassischen Zahlentheorie besagt, dass jeder Modultransformation

$$\theta=\frac{p\theta+q}{r\theta+s}, \qquad ps-qr=\pm 1$$

von einer quadratischen Irrationalzahl θ in sich selbst, welche zur positiven Diskriminante D gehört, ein-eindeutig eine Lösung t, u der Pellschen Gleichung

$$t^2-Du^2=\pm 4 \tag{1}$$

entspricht. Von Herrn Takagi[1] wurde einmal hervorgehoben, dass diese ein-eindeutige Beziehung durch $E=r\theta+s$ bewerkstelligt wird, wobei $E=\frac{t+u\sqrt{D}}{2}$ ist. Wenn also die Zahl θ im Gaussschen Sinne reduziert und

$$\theta=k_0+\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_{n-1}}+\frac{1}{\theta}=\frac{*}{q_n\theta+q_{n-1}} \tag{2}$$

die primitive Periode der Kettenbruchentwicklung derselben ist, so ist

$$E_0=q_n\theta+q_{n-1}$$

diejenige Zahl, welche der kleinsten positiven Lösung t_0, u_0 von (1) im obigen Sinne entspricht.

Es sei nun speziell $\theta=\frac{k_0+\sqrt{D}}{2}$, wobei k_0 die grösste, nicht $\sqrt{D}$ übersteigende ungerade oder gerade Zahl sei, je nachdem $D\equiv 1$ oder $0 \pmod{4}$. Dann ist θ ersichtlich reduziert und überdies sind die Teilnenner $k_1, \ldots, k_{n-1}$ von (2) wegen eines Satzes von Galois symmetrisch, so dass $k_\nu=k_{n-\nu}$ $(\nu=1, \ldots, n-1)$.

Ist $NE_0=+1$, so ist n gerade, etwa $n=2l$. Es sei also

$$(3)\quad \begin{cases} \theta=k_0+\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_{l-1}}+\frac{1}{\eta}=\frac{*}{q_l\eta+q_{l-1}}, \\ \eta=k_l+\frac{1}{k_{l-1}}+\cdots+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{\theta}=\frac{*}{q\theta+q'}, \quad \eta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad (a>0) \end{cases}$$

gesetzt, wobei $q=[k_{l-1}, \ldots, k_1]=q_l$, $q'=[k_{l-1}, \ldots, k_2]$. Dann ist nach Takagi

1) Vgl. Takagi: On the Theory of Indeterminate Equations of the Second Degree in Two Variables. Bullet. Calcultta Math. Soc. Vol. XX, 1928-29 oder Syotô Seisûron Kôgi, 1931, S. 249.

$$E_0=(q_l\eta+q_{l-1})(q\theta+q').$$

Aus (3) können wir leicht erschliessen, dass $(q_l\eta+q_{l-1})\sqrt{a}$, also auch $(q\theta+q')\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ eine biquadratische Einheit ist und somit[2)]

(4)
$$\sqrt{E_0}=(q_l\eta+q_{l-1})\sqrt{a}=(q\theta+q')\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Es ist bemerkenswert, dass die Zahl $\sqrt{E_0}$ nach (4) wesentlich durch $q=q_l=[k_1,\dots,k_{l-1}]$ völlig bestimmt werden kann und dass, wenn D die Diskriminante eines quadratischen Körpers ist, die Zahl a der Norm des von 1 verschiedenen primitiven ambigen Hauptideals $[a, a\eta]$ von $R(\sqrt{D})$ gleich ist, das in E_0+1 oder E_0-1 aufgeht, je nachdem l gerade oder ungerade ist[2)].

Ist $NE_0=-1$, d. h. n ungerade, etwa $n=2l-1$, so sei

$$k_{l-1}+\frac{1}{k_{l-2}}+\cdots+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{\theta}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\qquad(a>0)$$

gesetzt. Dann ist

$$\sqrt{E_0}=\frac{\sigma\sqrt{\alpha}+\bar{\sigma}\sqrt{\bar{\alpha}}}{2}.$$

Dabei ist $\sigma=q_l+q_{l-1}i$, $\alpha=b+2ai$ und die Zahl α hat dieselbe idealtheoretische Bedeutung wie oben im Dirichletschen Körper $R(\sqrt{-1}, \sqrt{D})$[3)].

---

2) Vgl. Kuroda: Über den Dirichletschen Körper. J. Fac. Sc. Tokyo, Sec. I. Vol. IV. Part 5, 1943, S. 395–6.

3) Vgl. Legendre-Maser: Zahlentheorie, Bd. I, 1886, S. 64–73. Dort befindet sich eine klassische Behandlung verwandtes Problems.