54. Über die Harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, (II).

Von Kunihiko KODAIRA.
Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1944.)

II. Felder mit gegebenen Singularitäten; Anwendungen auf die Funktionentheorie.

§ 5. *Felder mit gegebenen Singularitäten.* Zunächst geben wir genau an, was unter dem Ausdruck „*ein harmonisches Tensorfeld hat eine gegebene Singularität*" verstanden werden soll. Es sei F eine abgeschlossene Menge in $\mathfrak{M}$ ohne inneren Punkt, und U eine Umgebung von F. Ferner sei ein in $U-F$ reguläres harmonisches Tensorfeld Φ gegeben. *Ist nun e ein auf $\mathfrak{M}$ definiertes (nicht immer überall reguläres) harmonisches Tensorfeld und gilt*

$$e=\Phi+\chi \quad \text{in} \quad U-F\,,$$

wo χ ein in U überall reguläres harmonisches Feld ist, so sagen wir e und Φ haben auf F dieselbe Singularität, und schreiben

$$e\sim\Phi \quad \text{in} \quad F\,.$$

Die Singularität von e auf F wird also mit Φ gegeben. Es handelt sich nun um folgendes Problem: *Gegeben seien Φ und F. Gesucht wird ein in $\mathfrak{M}-F$ überall reguläres harmonisches e mit $e\sim\Phi$ in F.* Um die wegen der Lage von F in $\mathfrak{M}$ verwickelten Schwierigkeiten zu vermeiden, setzen wir voraus, dass F in einer geodätischen Kugel $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir mit S, und das Innere von $\mathfrak{K}$ mit G. Die Antwort auf unser Problem ist gegeben durch den

Satz 8. *Es sei ρ der Rang von Φ*[1]. i) *Falls $2\leqq\rho\leqq n-2$, existiert immer ein gesuchtes e.* ii) *Falls $\rho=1$ bzw. $\rho=n-1$, existiert ein e unter der Bedingung*[2]:

$$\int_S \Phi^j\sqrt{g}\,d\mathfrak{o}_j=0\,, \tag{5.1}$$

bzw.

$$(\Phi, S)=0\,. \tag{5.1*}$$

Zum Beweis brauchen wir folgendes

Lemma. In der Umgebung von S gibt es Ψ und C mit

$$\Phi=\mathfrak{r}^*\Psi=\mathfrak{r}C\,.$$

---

1) Die Fälle $\rho=0$ und $\rho=n$ sind trivial.

2) Ist $n=2$, so müssen die beiden Bedingungen (5.1) und (5.1)* erfüllt sein.

Beweis. Wegen (3.18) genügt es nur die Existenz von Ψ zu zeigen. Es sei ξ der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$, $r=r(x, \xi)$ der geodätische Abstand von x bis ξ, $r_{\mathfrak{K}}$ der Radius von $\mathfrak{K}$, und $v^1, v^2, \ldots, v^{n-1}$ ein Parametersystem auf S. Dann wird ein Punkt x in der Umgebung von S dargestellt durch $r(x, \xi)$ und die Koordinaten $(v^1, v^2, \ldots, v^{n-1})$ des Schnittpunktes von der geodätischen Linie durch x und ξ mit S. Wir benutzen also die Koordinaten

$$x^1=v^1, \quad x^2=v^2, \ldots, x^{n-1}=v^{n-1}, \quad x^n=r(x, \xi)-r_{\mathfrak{K}}$$

in der Umgebung von S. Dann genügt das Tensorfeld

$$\Phi_S=\Phi_{jk\ldots l}(x^1, x^2, \ldots x^{n-1}, 0) \qquad (j, k, \ldots, l \neq n)$$

auf S der Gleichung $\mathfrak{r}^*\Phi_S=0$, ist also wegen (5.1)* in $\overset{*}{\mathfrak{H}}{}_S^g$ enthalten. Nach Bemerkung 2 im § 3 gibt es daher ein Ψ_S mit $\Phi_S=\mathfrak{r}^*\Psi_S$. Das gesuchte Ψ wird dann gegeben durch

$$\begin{cases} \Psi_{jk\ldots l}(x^1, \ldots, x^{n-1}, r)=\Psi_{Sjk\ldots l}(x^1, \ldots, x^{n-1})+\int_0^r \Phi_{njk\ldots l}(x^1, \ldots, x^{n-1}, r)dr\,, \\ \Psi_{nk\ldots l}=0\,. \end{cases}$$

Beweis des Satzes. Es sei c eine 2-mal stetig differenzierbare Fortsetzung von C auf $\mathfrak{K}$, und ψ eine ebensolche Fortsetzung von Ψ auf $\mathfrak{M}-\mathfrak{K}$. Setzt man

$$\varphi_1=\begin{cases} \mathfrak{r}c & \text{in} \quad \mathfrak{K}\,, \\ \mathfrak{r}^*\psi & \text{in} \quad \mathfrak{M}-\mathfrak{K}\,, \end{cases}$$

so gehört φ_1 offenbar zu $\mathfrak{L}^p$, lässt sich also in der Form

$$\varphi_1=e_1+h\,, \qquad e_1 \in \mathfrak{L}^p-\overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p\,, \qquad h \in \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^p$$

zerlegen. Nun definieren wir e durch

$$e=\begin{cases} e_1+\Phi-\mathfrak{r}c & \text{in} \quad \mathfrak{K}\,, \\ e_1 & \text{in} \quad \mathfrak{M}-\mathfrak{K}\,, \end{cases}$$

und φ durch

$$\varphi=\begin{cases} \Phi & \text{in} \quad \mathfrak{K}\,, \\ \mathfrak{r}^*\psi & \text{in} \quad \mathfrak{M}-\mathfrak{K}\,. \end{cases}$$

Dann gilt offenbar $e=\varphi-h$. *Ferner ist e in $\mathfrak{M}-F$ überall regulär harmonisch.* Denn, sind η, ζ in $\mathfrak{M}-F$ liegende Funkutionen, so gilt wegen $\mathfrak{r}^*\varphi=0$, $(h, \mathfrak{r}\eta)=0$

$$(e, \mathfrak{r}\eta)=(\varphi-h. \mathfrak{r}\eta)=0\,;$$

und andererseits wegen $\Phi-\mathfrak{r}c=0$ auf S

$$(e, \mathfrak{r}^*\zeta)=(\Phi-\mathfrak{r}c, \mathfrak{r}^*\zeta)_G=\int_S\{\zeta\cdot(\Phi-\mathfrak{r}c)\}^j\sqrt{g}\, d\sigma_j=0\,.$$

e ist also nach dem Satz 6 in $\mathfrak{M}-F$ regulär harmonisch. In analoger Weise gilt für in G liegende Funktionen η, ζ

$$(e_1-\mathfrak{r}c, \mathfrak{r}\eta)=-(h, \mathfrak{r}\eta)=0\,,$$
$$(e_1-\mathfrak{r}c, \mathfrak{r}^*\zeta)=0\,.$$

$e_1-\mathfrak{r}c$ *ist also in G regulär harmonisch.* Also folgt $e\sim\Phi$ in F, w.z.b.w.

Über die Eindeutigkeit von e gibt folgender Satz Auskunft:

Satz 9. *Es seien $Z_1^\rho, Z_2^\rho, \dots, Z_p^\rho$ die ρ-dim. linear unabhangigen Grundzyklen von $\mathfrak{M}$. Unter der Bedingungen des Satzes 8, wird das harmonische Feld e mit $e\sim\Phi$ in F eindeutig bestimmt, sobald die Perioden $\pi_\nu=(e, Z_\nu^\rho)$ auf Z_ν^ρ gegeben werden.*

Beweis. Gilt $e\sim f\sim\Phi$ in F, so ist offenbar $e-f\in\mathfrak{G}^\rho$, und die Behauptung folgt aus dem Satz 2.

Betrachten wir schliesslich das harmonische skalare (d. h. 0-dim.) Potential mit gegebenen „Polen und Residuen". Hierüber gilt der

Satz 10. *Sind endlich viele Punkte ξ_ν auf $\mathfrak{M}$ und Residuen σ_ν in ξ_ν gegeben, so existiert ein in $\mathfrak{M}$ bis auf die Pole ξ_ν reguläres harmonisches skalares Potential u mit*

$$u\sim r^{2-n}\sigma_\nu\{1+\cdots\}+\log r\{\tau_\nu+\cdots\} \text{ in } \xi_\nu, \qquad r=r(x, \xi_\nu)\,,$$

sobald $\Sigma\sigma_\nu=0$ ist.

Beweis. Jedes harmonische skalare Potential u ist bis auf additive Konstante auf das harmonische Vektorfeld e mit Perioden 0 durch die Relation $e=\mathfrak{r}^*u$ ein-eindeutig bezogen. Es genügt also die Existenz von e zu zeigen. Einfachheitshalber beschränken wir uns auf den Fall, wo nur zwei Punkte ξ_1, ξ_2 in einer Kugel $\mathfrak{K}$ mit den Residuen $\sigma_1, \sigma_2=-\sigma_1$ in Frage kommen. Setzt man $r_\nu=r(x, \xi_\nu)$, so gibt es nach dem Satz 3 ein harmonisches skalares Petential

$$u_\nu=r_\nu^{2-n}\{\sigma_\nu+\cdots\}+\log r_\nu\{\tau_\nu+\cdots\}\,.$$

Bildet man $\Phi=\mathfrak{r}^*u_2+\mathfrak{r}^*u_1$, so genügt Φ der Gleichung

$$\int_S \Phi^j\sqrt{g}\, d\mathfrak{o}_j=0\,,$$

also existiert nach Satz 8 und Satz 9 das gesuchte harmonische Feld $e\sim\Phi$ mit Perioden 0.

§ 6. *Abelsche Integrale auf Riemannschen Flächen.* Es sei $\mathfrak{F}$ eine Riemannsche Fläche. Die lokalen Koordinaten („Ortsuniformisierende") auf $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir allgemein mit $z=x+iy$. $\mathfrak{F}$ ist bekanntlich ein konformer Raum. Ist also $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ ein kovarianter Vektor, so auch $\mathfrak{d}\varphi=(\varphi_2, -\varphi_1)$; ein Vektor ist hier zugleich eine Vektordichte. Es gibt also auf $\mathfrak{F}$ nur drei Arten interessanter Felder: Vektorfelder: $\varphi, \psi, \cdots$; Skalarfelder (=Felder der Tensordichte 2-ten Ranges): $u, \eta, \cdots$; und Felder der Skalardichte (=Tensorfelder 2-ten Ranges): $\mathfrak{c}, \dots$. Die bisherige Theorie der Tensorfelder auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann nun auf $\mathfrak{F}$ übertragen werden, indem gesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{r}^*u&=(\partial_1 u, \partial_2 u)\,,\\ \mathfrak{r}u&=(\partial_2 u, -\partial_1 u)\,,\\ \mathfrak{r}^*\varphi&=\partial_1\varphi_2-\partial_2\varphi_1\,,\\ \mathfrak{r}\varphi&=-\partial_1\varphi_1-\partial_2\varphi_2\,,\end{aligned}\right.$$

wobei $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2=\frac{\partial}{\partial y}$ bedeutet. Dann gilt

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \Delta u=-\mathfrak{r}\mathfrak{r}^*u=-\mathfrak{r}^*\mathfrak{r}u=(\partial_1^2+\partial_2^2)u\,, \\ \Delta\varphi=-(\mathfrak{r}\mathfrak{r}^*+\mathfrak{r}^*\mathfrak{r})\varphi=(\partial_1^2+\partial_2^2)\varphi\,, \end{cases}$$

und

$$(6.2)\qquad \begin{cases} (u,\mathfrak{r}^*\varphi)_G=(\mathfrak{r}u,\varphi)_G+\int_\Gamma u\varphi d\Gamma\,, \\ (u,\mathfrak{r}\varphi)_G=(\mathfrak{r}^*u,\varphi)_G-\int_\Gamma u\varphi do\,, \end{cases}$$

wobei Γ eine geschlossene Kurve, G der von ihr begrenzte Bereich ist,

$$\int u\varphi d\Gamma=\int u(\varphi_1dx+\varphi_2dy)\,,$$

$$\int u\varphi do=\int u(\varphi_1dy-\varphi_2dx)\,,$$

und $(\ ,\ )_G$ dieselbe Bedeutung wie in § 2 hat. Ferner gilt

$$(6.3)\qquad (\Delta\psi,\varphi)_G-(\psi,\Delta\varphi)_G=\int_\Gamma\{[\mathfrak{r}^*\psi\cdot\varphi]d\Gamma-[\mathfrak{r}\psi\cdot\varphi]do\}$$

wenn $[\mathfrak{r}^*\psi\cdot\varphi]=\mathfrak{r}^*\psi\cdot\varphi-\mathfrak{r}^*\varphi\cdot\psi$ bzw. $[\mathfrak{r}\psi\cdot\varphi]=\mathfrak{r}\psi\cdot\varphi-\mathfrak{r}\varphi\cdot\psi$ gesetzt wird.

Als harmonische Tensorfelder in 2-dim. Mannigfaltigkeiten verdienen offenbar nur die Vektorfelder unser Interesse, und für die Vektorfelder φ laufen die Formeln (6.1), (6.2), (6.3) ganz parallel den entsprechenden Formeln in § 3 für die Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Insbesondere ist, lokal betrachtet, unser Δ nichts anderes als das Δ im Riemannschen Raum mit der Metrik: $ds^2=dx^2+dy^2$. Mit der Methode von § 4 beweist sich also: *Ist φ eine in G definierte nach Lebesgue quadrat-summierbare Funktion und gilt $(\varphi,\Delta\psi)=0$ für alle in G liegenden 3-mal stetig differenzierbaren ψ, so ist φ in G regulär und es gilt* $\mathfrak{r}^*\varphi=\mathfrak{r}\varphi=0$. (Der Beweis ist hier viel einfacher als in § 4, da eine „Grundlösung" $\log|z|$ von vornherein bekannt ist.) Hiernach bekommt man den

Satz 11. *Ist φ in G nach Lebsgue quadrat-summierbar und gilt $(\varphi,\mathfrak{r}\eta)=(\varphi,\mathfrak{r}^*\eta)=0$ für alle in G liegenden 2-mal stetig differenzierbaren η, so ist φ in G regulär und es gilt* $\mathfrak{r}\varphi=\mathfrak{r}^*\varphi=0$.

Bis dahin ist nicht benutzt, dass $\mathfrak{F}$ geschlossen ist. Nunmehr sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Riemannsche Fläche. Dann ist aus dem Satz 11 nach der Methode von § 3 gezeigt, dass es ein überall reguläres harmonisches Vektorfeld φ mit gegebenen Perioden existiert. Ein harmonisches Vektorfeld φ ist aber mittels der Relation

$$f(z)=\int^z\varphi d\Gamma+i\int^z\varphi do$$

mit der analytischen (nicht notwendig eindeutigen) Funktion $f(z)$ auf $\mathfrak{F}$ bis auf additive Konstante ein-eindeutig verbunden. Die Funktion, die so aus einem überall regulären harmonischen Feld φ gebildet wird, ist nichts anders als das Abelsche Integral erster Art.

Jetzt lassen wir wieder zu, dass $\mathfrak{F}$ auch offen sein kann. Es seien $z_\nu(\nu=1,\dots,m)$ endlich viele Punkte in einem Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Rande S und

$$\mathfrak{s}_\nu(z)=\sigma_\nu \log(z-z_\nu)+\sum_{j=1}^{h}\frac{\sigma_{\nu j}}{(z-z_\nu)^j}$$

seien gegeben. Setzt man dann

$$\Phi=\mathfrak{r}^*\Re\{\sum_\nu \mathfrak{s}_\nu(z)\},$$

so gilt

$$\int_S \Phi d\Gamma+i\int_S \Phi do=2\pi i\sum\sigma_\nu .$$

Gilt also $\sum\sigma_\nu=0$, so genügt Φ den Bedingungen (5.1) und (5.1)*. Nach § 5 lässt sich also ein harmonisches Vektorfeld φ mit

$$\varphi\sim\Phi \quad \text{in} \quad z_\nu$$

bilden. Das Abelsche Integral 2-ter bzw. 3-ter Art mit den Singularitäten $\mathfrak{s}_\nu$ in z_ν bekommt man dann als Integral

$$f(z)=\int^z \varphi d\Gamma+i\int^z \varphi do .$$

Errata: Die ersten drei Zeilen des Satzes 1 sind durch folgende zu ersetzen:

Satz 1. *Jedem* $C\in L(K)$ *bzw.* $\mathfrak{d}\Phi\in L(D)$ *kann ein unteres Feld* $\mathfrak{c}(C)$ *bzw.* $\mathfrak{c}(\mathfrak{d}\Phi)$ *so linear zugeordnet werden, dass folgendes gilt:*

$$\mathfrak{r}\mathfrak{c}(C)=\mathfrak{c}\mathfrak{r}(C), \qquad \mathfrak{r}\mathfrak{c}(\mathfrak{d}\Phi)=\mathfrak{c}(\mathfrak{r}\mathfrak{d}\Phi), \tag{2.14}$$