91. *Sur les sommes directes des espaces linéaires.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

Pour voir la réductibilité des anneaux des opérateurs, il faut rechercher préalablement la somme directe des espaces et celle des anneaux des opérateurs. Or, comme nous avons vu dans la définition de M. S. Banach[1] sur la somme directe d'un nombre fini des espaces, elle dépend intimement la topologie qui définit lui et en effet il y a diverses sommes directes de ceux. Donc, nous devons rechercher respectivement celles, mais dans cette note, nous nous bornons de rechercher la somme directe (L_p) $(p \geqq 1)$.

1. Soient $\varLambda$ un ensemble non vide, $m^*(\varGamma)$ une mesure extérieure et régulière de M. C. Caratheodory sur lui et $m(\varGamma)$ la mesure des ensembles mesurables $\varGamma$ de $\varLambda$ par rapport à $m^*(\varGamma)$. Etant donnés un nombre positif $p \geqq 1$ et un ensemble $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \varLambda)$ des espaces linéaires, normés et complets qui correspondent à chaque élément de $\varLambda$, nous désignons par $\overline{\sum}_{L_p} \oplus f_\lambda$ un ensemble $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \varLambda)$ des éléments tel qu'on ait $f_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$ et $\overline{\int}_\varLambda |f_\lambda|^p \, dm < +\infty$, où $\overline{\int}$ désigne l'integrale extérieure par rapport à $m(\varGamma)$, et nous l'appelons la somme directe $(\overline{L_p})$ des éléments $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \varLambda)$. Encore, nous désignons par $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ l'ensemble de toutes les sommes directes $(\overline{L_p})$ des éléments de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \varLambda)$ et nous l'appelons la somme directe $(\overline{L_p})$ des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \varLambda)$.

Puis, nous définirons l'addition, la multiplication par un nombre constant et la norme sur les éléments de $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ comme il suit, c'est-à-dire, nous entendrons par la somme $f+g$ de deux éléments f et g, la produit αf d'un élément f et un nombre α respectivement $\overline{\sum}_{L_p} \oplus (f_\lambda + g_\lambda)$ et $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \alpha f_\lambda$ où $f = \overline{\sum}_{L_p} \oplus f_\lambda$ et $g = \overline{\sum}_{L_p} \oplus g_\lambda$. Encore, nous entendrons par la norme $|f|$ d'un élément $f = \overline{\sum}_{L_p} \oplus f_\lambda$ le nombre $\sqrt[p]{\overline{\int}_\varLambda |f_\lambda|^p \, dm}$.

Or, puisque deux éléments f et g de $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ tels qu'on ait $|f-g|=0$ ne sont pas distincts essentiellement dans notre discussion, nous dissons qu'ils sont équivalents l'un l'autre et les identifions.

(1.1) $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ sont les espaces linéaires, normés et complets.

(1.2) Pour les sous-ensembles $\mathfrak{M}_\lambda$ de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \varLambda)$, nous désignons par $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{M}_\lambda$ l'ensemble de tous les sommes directes $(\overline{L_p})$ $f = \overline{\sum}_{L_p} \oplus f_\lambda$ telles qu'on ait $f_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda$ $(\lambda \in \varLambda)$. Alors, si tous les

1) S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

ensembles $\mathfrak{M}_\lambda$ sont fermés dans $\mathfrak{M}_\lambda$, $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{M}_\lambda$ est aussi fermé dans $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$.

(1.3) Pour un sous-ensemble Γ de Λ, nous désignons par f_Γ la somme directe $(\overline{L_p})$ $\overline{\sum}_{L_p}\oplus g_\lambda$, où $g_\lambda=f_\lambda$ $(\lambda\in\Gamma)$ et $g_\lambda=0$ $(\lambda\bar{\in}\Gamma)$. Quand nous définissons la norme de f_Γ par $\sqrt[p]{\int_\Gamma |f_\lambda|^p\,dm}$, l'ensemble de tous les éléments f_Γ est un espace linéaire, normé et complet. Nous le désignons par $\mathfrak{B}_\Gamma$.

(1.4) Quand Λ_a $(a\in I)$ sont les sous-ensembles mesurables de Λ et disjoints deux-à-deux, nous avons $\mathfrak{B}_\Gamma=\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{M}_{\Lambda_a}$, où Γ désigne un sous-ensemble measurable de Λ tel qu'on ait $m(\Gamma-\Lambda_a)=0$ $(a\in I)$ et que tout sous-ensemble mesurable de Γ de la mesure non nulle ne soit pas disjoints à tout ensemble Λ_a sauf peut-être un ensemble de la mesure nulle.

2. Maintenant, nous considérons la mesurabilité des éléments de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ et des sous-ensembles de celui. Quand un élément $f=\overline{\sum}_{L_p}\oplus f_\lambda$ de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ jouit de la propriété: $F(\lambda)=|f_\lambda|^p$ sommable sur Λ, nous dirons que f est sommable (L_p) au sens de la norme et nous le désignons par $\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$. Alors, l'ensemble $\mathfrak{M}$ de tous les éléments sommables (L_p) au sens de la norme de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est fermé et de la forme étoile, c'est-à-dire, il est un ensemble de tous les éléments situés sur quelques lignes droites qui passent l'élément 0, mais non pas linéaire en général. Or, quand il existe un sous-ensemble $\mathfrak{N}$ de celui linéaire et fermé qui satisfait aux conditions:

(1) il est maximal, c'est-à-dire, il n'existe aucun sous-ensemble linéaire et fermé de $\mathfrak{M}$ qui contient proprement $\mathfrak{N}$,

(2) pour tout sous-ensemble Γ de Λ, l'ensemble $\mathfrak{N}_\Gamma$ de tous les éléments f_Γ, où $f\in\mathfrak{N}$, est aussi maximal, c'est-à-dire, il n'existe aucun sous-ensemble linéaire et fermé de $\mathfrak{B}_\Gamma$ qui contient proprement $\mathfrak{N}_\Gamma$ et que ses éléments soient sommables (L_p) au sens de la norme sur Γ,

nous dissons que $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est sommable (L_p), et nous appelons $\mathfrak{N}$ la somme directe (L_p) de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ et le désignons par $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$.

De plus, quand $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est sommable (L_p), la somme directe (L_p) de ceux n'est pas déterminée univoquement. En effet, étant donnée une somme directe (L_p) $\mathfrak{N}=\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$, nous considérons une fonction $\omega(\lambda)$ définie sur Λ et qui prend 1 ou bien -1 comme ses valeurs. Alors, l'ensemble de tous les éléments $\sum_{L_p}\oplus\omega(\lambda)f_\lambda$, où $\sum_{L_p}\oplus f_\lambda\in\mathfrak{N}$, est une somme directe (L_p) de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$, mais elle est différent de $\mathfrak{N}$, si $\omega(\lambda)$ est non mesurable.

Or, il existe $\overline{\sum}_{L_1}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ non sommable (L_1). Voici tel exemple. Soient Λ l'intervalle (0,1), $m(\Gamma)$ la mesure lebesguienne sur Λ, Γ_0 un sous-ensemble non mesurable de Λ tel que $m^*(\Gamma_0)=m^*(\Lambda-\Gamma_0)=1$ et

R_k $(k=1,2)$ les espaces unitaires des k-dimensions. Quand nous posons $\mathfrak{B}_\lambda=R_2$ pour $\lambda\in\Gamma_0$ et $\mathfrak{B}_\lambda=R_1$ pour $\lambda\bar{\in}\Gamma_0$, $\overline{\sum}_{L_1}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ n'est pas alors sommable (L_1). Pour le voir, nous supposons qu'elle est sommable (L_1) et il existe alors la somme directe (L_1) $\mathfrak{R}=\sum_{L_1}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$. Soit $f=\sum_{L_1}\oplus f_\lambda$ un élément de $\mathfrak{R}$ tel qu'on ait $|f_\lambda|=1$ presque partout de Λ. Or, étant donné un élément $g=\sum_{L_1}\oplus g_\lambda$ de $\mathfrak{R}$, nous pouvons le modifier en multipliant une fonction sommable $\omega(\lambda)$ sur g_λ de manière que $|g_\lambda|\neq 0$ entraine $|g_\lambda|=1$. Nous pouvons alors décomposer Λ en les trois parties Λ_k $(k=0,1,2)$ mesurables et disjoints deux-à-deux de manière que $|f_\lambda+g_\lambda|=0$ sur $\Lambda_0-\Gamma_0$, $=1$ sur $\Lambda_1-\Gamma_0$ et $=2$ sur $\Lambda_2-\Gamma_0$. Donc, la mesurabilité de f_λ et g_λ entraine $|f_\lambda+g_\lambda|=0$ sur Λ_0, $=1$ sur Λ_1 et $=2$ sur Λ_2 respectivement sauf peut-être un ensemble de la mesure nulle, d'où $f_\lambda+g_\lambda=0$ sur Λ_0, $g_\lambda=0$ sur Λ_1 et $f_\lambda=g_\lambda$ sur Λ_2 sauf peut-être un ensemble de la mesure nulle et par suite $g_\lambda=\varphi_{\Lambda_2}(\lambda)f_\lambda-\varphi_{\Lambda_1}(\lambda)f_\lambda$, où $\varphi_{\Lambda_k}(\lambda)$ $(k=1,2)$ désignent les fonctions caractéristiques de Λ_k.

Maintenant, nous prenons l'ensemble $\mathfrak{R}_{\Gamma_0}$ de tous les éléments f_{Γ_0}, où $f\in\mathfrak{R}$, et une somme directe (L_1) $g=\sum_{L_1}\oplus g_\lambda$ telle qu'on ait $g_\lambda=Af_\lambda$, où A désigne un opérateur sur R_2 donné par $(x'=y,\ y'=x)$. Alors, g n'appartient pas à $\mathfrak{R}_{\Gamma_0}$ et tout élément $ag+h=\sum_{L_1}\oplus(ag_\lambda+h_\lambda)$, où $h=\sum_{L_1}\oplus h_\lambda\in\mathfrak{R}_{\Gamma_0}$, est sommable (L_1) au sens de la norme, d'où l'ensemble linéaire et fermé déterminé par g et $\mathfrak{R}_{\Gamma_0}$ contient proprement $\mathfrak{R}_{\Gamma_0}$ et ses éléments sont tous sommables (L_1) au sens de la norme sur Γ_0, ce qni donne une contradiction et par suite $\overline{\sum}_{L_1}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est non sommable (L_1).

Puis, nous considérons la mesurabilité des sommes directes (L_p) des ensembles. Voici la définition. Quand un sous-ensemble $\mathfrak{M}$ de $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ remplit la condition: pour tout élément $f=\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$ de $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$, $\underset{\lambda}{\mathrm{Ens}}(f_\lambda\in\mathfrak{M})$ est toujours mesurable, nous dirons que $\mathfrak{M}$ est sommable (L_p). Or, une somme directe (L_p) $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{M}_\lambda$ des sous-ensembles fermés $\mathfrak{M}_\lambda$ de $\mathfrak{B}_\lambda$ n'est pas necéssairement sommable (L_p).

(2.1) La famille des sous-ensembles sommables (L_p) de $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est un corps borelien.

(2.2) Pour que $\overline{\sum}_{\Gamma_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est sommable (L_p), il faut et il suffit que, quelsque soient les espaces $\hat{\mathfrak{B}}_\lambda$ linéaires, normés et complets qui contient $\mathfrak{B}_\lambda$, $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est sommable (L_p) dans $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\hat{\mathfrak{B}}_\lambda$.

3. D'ailleurs, nous ne pouvons déduire de la mesurabilité d'une somme directe (L_p) $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ l'étendue de celui à chaque élément λ_0 de Λ, c'est-à-dire, étant donné une somme directe (L_p) $\mathfrak{R}=\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda \leqq \overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ et un élément λ_0 de Λ, l'ensemble des éléments f_{λ_0} dans tous les éléments $f=\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$ de $\mathfrak{R}$ n'est pas déterminé univoquement, puisque chaque élément f de $\mathfrak{R}$ est déterminé sauf peut-être un ensemble de la mesure nulle. Or, il faut savoir souvent ces ensembles dans notre recherche, et pour remplire ces demandes, nous introduissons ici la notion de la continuité sur les sommes directes (L_p) des espaces.

Pour cela, nous supposons que Λ soit un espace de M. F. Hausdorff et bicompact. Alors, l'ensemble $\mathfrak{M}$ de tous les éléments $f=\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$ de la somme directe (L_p) tels que $F(\lambda)=|f_\lambda|$ soient continues sur Λ est fermé et de la forme étoile, mais non pas linéaire en général. Or, quand il existe un sous-ensemble $\mathfrak{N}$ linéaire et fermé de $\mathfrak{M}$ qui satisfait aux conditions :

(1) il est maximal, c'est-à-dire, il n'existe aucun sous-ensemble linéaire et fermé de $\mathfrak{M}$ qui contient proprement $\mathfrak{N}$,

(2) sauf peut-être un ensemble de la mesure nulle de Λ, pour tout élément λ_0 de Λ, l'ensemble de tous les éléments f_{λ_0} qui appartiennent au moins un élément $f=\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$ de $\mathfrak{N}$ est partout dense dans $\mathfrak{B}_{\lambda_0}$,

nous dirons que $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ distribue continuellement, que tout élément de $\mathfrak{N}$ est continu, et nous appelons $\mathfrak{N}$ le noyau continu de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$. De même que le cas de la mesurabilité, le noyau continu de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ ne détermine pas univoquement.

Or, quand $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ distribue continuellement, nous pouvons définir une topologie sur l'ensemble $\mathfrak{S}=\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{B}_\lambda$ de manière que tout élément continue $\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$ est aussi continu sur Λ par rapport à celui. Voici la définition. Etant donné un élément f_{λ_0}, un nombre positif ε, un sous-ensemble ouvert Δ de Λ qui contient f_{λ_0} et un nombre fini des sommes directes (L_p) continues $g^{(k)}=\sum_{L_p}\oplus g_\lambda^{(k)}$ $(k=1,2,\dots,n)$ telles qu'on ait $f_{\lambda_0}=g_{\lambda_0}^{(k)}$ $(k=1,2,\dots,n)$, nous désignons par $\mathfrak{U}$ $(f_{\lambda_0},\varepsilon,\Delta,g_1,g_2,\dots,g_n)$ l'ensemble de tous les éléments f_λ de $\mathfrak{S}$ tels qu'on ait $\lambda\in\Delta$ et $|f_\lambda-g_\lambda^{(k)}|<\varepsilon$ $(k=1,2,\dots,n)$ et nous l'appelons un voisinage de f_λ. Nous définirons alors la topologie sur $\mathfrak{S}$ par le système de ces voisinages.

(3.1) $\mathfrak{S}$ est un espace de M. F. Hausdorff. La somme $f+g$ et la produit αf, où f et g appartient à un même espace $\mathfrak{B}_\lambda$, sont continues par rapport à respectivement f, g et α, f.

(3.2) Pour qu'une somme directe (L_p) $f=\overline{\sum}_{L_p}\oplus f_\lambda$ de $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est continue, il faut et il suffit que $F(\lambda)=f_\lambda$ est continue sur Λ.

(3.3) Une somme directe (L_p) $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ distribuée continuellement est aussi sommable (L_p) et il existe précisément une somme directe (L_p) qui contient le noyau continu de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$.

En effet, étant donnée une fonction $\omega(\lambda)$ mesurable et bornée sur Λ, nous désignons par U_ω un opérateur de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ tel qu'on ait $U_\omega f=\sum_{L_p}\oplus\omega(\lambda)f_\lambda$, où $f=\sum_{L_p}\oplus f_\lambda$. Alors, le plus petit sous-ensemble linéaire et fermé de $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ qui contient $U_\omega f$ pour tout opérateur U_ω et toute somme directe (L_p) continue f jouit de la propriété

1) Voir ma note paru dans ce journal, Sur la reductibilité des anneaux des opérateurs.

demandée. Nous l'appelons la somme directe (L_p) continue de $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Remarque. Nous pouvons trouver les plusieur exemples des sommes directes (L_p) distribuées continuellement. De plus, nous avons le suivant.

(3.4) Quand une somme directe (L_p) $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ est séparable et sommable (L_p), nous pouvons modifier la topologie de Λ de manière que $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ est continuellement distribuée.

4. Maintenant, nous considérons les fonctionnelles linéaires définies sur $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$. Soit $m^*(\Gamma)$ une mesure de M. S. Banach définie sur tout sous-ensemble Γ de Λ qui est une prolongation de $m(\Gamma)$. Etant donné un ensemble $\{\varphi_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, où φ_λ est une fonctionnelle linéaire et bornée sur $\mathfrak{B}_\lambda$, nous considérons un integrale $\Phi(f)=\int_\Lambda \varphi_\lambda(f_\lambda)dm^*$, où $f=\sum_{L_p} \oplus f_\lambda$. Quand il existe pour tout élément de $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ et il est bornée sur celui-ci, nous l'appelons une somme directe extérieure $\{\varphi_\lambda\}$ et nous la désignons par $\overline{\sum} \oplus \varphi_\lambda$.

Or, si $F(\lambda)=\varphi_\lambda(f_\lambda)$ est sommable sur Λ par rapport à $m(\Gamma)$ pour tout élément $f=\sum_{L_p} \oplus f_\lambda$ de la somme directe (L_p) $\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$, nous dirons que $\overline{\sum} \oplus \varphi_\lambda$ est sommable au sens de la fonctionnelle et nous la désignons par $\sum \oplus \varphi_\lambda$. Encore nous désignons par $\sum \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*$ l'ensemble de toutes les sommes directes $\sum \oplus \varphi_\lambda$ sommables au sens de la fonctionnelle et nous l'appelons une somme directe de $\mathfrak{B}_\lambda^*$ $(\lambda \in \Lambda)$, où $\mathfrak{B}_\lambda^*$ désigne l'espace conjugué de $\mathfrak{B}_\lambda$.

(4.1) Quand nous définissons la norme $|\varphi|$ d'une somme directe $\varphi=\sum \oplus \varphi_\lambda$ de $\sum \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*$ par l'égalité

$$|\varphi|=\text{borné sup}\,\frac{\left|\int_\Lambda \varphi_\lambda(f_\lambda)dm\right|}{|\sum_{L_p} \oplus f_\lambda|}\,,$$

où $\sum_{L_p} \oplus f_\lambda \neq 0$, $\sum \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*$ est un espace linéaire, normé et complet, et nous avons

$$(\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda)^* = \sum \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*\,.$$

En particulier, toute fonctionnelle linéaire et bornée sur $\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ peut être considérée comme une somme directe des fonctionnelles linéaires et bornées sur $\mathfrak{B}_\lambda$ qui est sommable au sens de la fonctionnelle.

(4.2) Quand $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ est continuellement distribuée, nous avons pour la somme directe (L_p) $\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ continue

$$(\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda)^* = \sum_{L_q} \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*\,,$$

où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et $\sum_{L_q} \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*$ est une somme directe (L_q) continue.

Remarque. $\sum \oplus \mathfrak{B}_\lambda^*$ de (4.1) n'est pas nécessairement une somme directe (L_q) des espaces $\mathfrak{B}_\lambda^*$. En effet, il existe un exemple d'une somme directe $\sum \oplus \varphi_\lambda$ qui est sommable au sens de la fonctionnelle, mais non pas sommable (L_q) comme une somme directe des éléments de $\mathfrak{B}_\lambda^*$. Voici tel exemple.

Soient Λ l'intervalle fermé (0.1), $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ les espaces linéaires qui sont égales à l'espace hilbertien $\mathfrak{H}$ des $2^{\aleph_0}$-dimensions et Γ_0 un sous-ensemble non mesurable de Λ. Alors, $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ est continuellement distribuée et donc tout élément $f = \sum_{L_p} \oplus f_\lambda$ de la somme directe $\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ continue peut être considéré une fonction sommable au sens de M. S. Bochner dont les valeurs appartiennent à $\mathfrak{H}$ et le domaine est Λ. Alors, quand nous désignons par $\{h_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ un système orthogonal complet et normalisé de $\mathfrak{H}$, il existe pour chaque élément $f = \sum_{L_p} \oplus f_\lambda$ de $\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ les éléments h_{μ_k} $(k=1, 2, \ldots)$ tels que f_λ $(\lambda \in \Lambda)$ soient contenus dans le sous-ensemble linéaire et fermé déterminé par h_{μ_k} $(k=1, 2, \ldots)$, et donc nous pouvons écrire f_λ sous la forme: $f_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\lambda\mu_k} h_{\mu_k}$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Maintenant, nous définirons les fonctionnelles $\{\varphi_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ par l'égalité

$$\varphi_\lambda(f_\lambda) = 2(h_\lambda, f_\lambda) \quad \text{pour} \quad \lambda \in \Gamma_0 \quad \text{et} \quad = (h_\lambda, f_\lambda) \quad \text{pour} \quad \lambda \bar{\in} \Gamma_0 .$$

Alors, la somme directe $\overline{\sum} \oplus \varphi_\lambda$ est sommable au sens de la fonctionnelle. En effet, nous avons pour $f = \sum_{L_p} \oplus f_\lambda$

$$\varphi_\lambda(f_\lambda) = a_{\mu_k \mu_k} \quad \text{pour} \quad \lambda = \mu_k \quad \text{et} \quad = 0 \quad \text{pour } \lambda \text{ tel que } \lambda \neq \mu_k \ (k=1, 2, \ldots)$$

et donc, d'après la définition, $F(\lambda) = \varphi_\lambda(f_\lambda)$ est identiquement 0 sauf peut-être une infinite dénombrable des éléments de Λ et donc nous avons $\int_\Lambda F(\lambda) dm = 0$, d'où $\sum \oplus \varphi_\lambda$ est sommable au sens de la fonctionnelle. Or, elle n'est pas sommable (L_q) au sens de la norme. En effet, nous avons $|\varphi_\lambda| = 2$ pour $\lambda \in \Gamma_0$ et $=1$ pour $\lambda \bar{\in} \Gamma_0$, d'où $|\varphi_\lambda|$ est non mesurable.

5. Puis, nous considérons une somme directe des opérateurs. Etant donnés une somme directe $(\bar{L}_p)$ $\sum_L \oplus \mathfrak{B}_\lambda$ des espaces $\mathfrak{B}_\lambda$ et les opérateurs A_λ linéaires et bornés sur $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, nous considérons une opérateur A qui transforme $f = \overline{\sum}_{L_p} \oplus f_\lambda$ en $Af = \overline{\sum}_{L_p} \oplus A_\lambda f_\lambda$. Quand il existe pour tout élément f de $\overline{\sum}_{L_p} \oplus f_\lambda$, nous l'appelons la somme directe extérieure de A_λ et nous la désignons par $\overline{\sum} \oplus A_\lambda$.

Or, si une somme directe des opérateurs transforme les éléments de $\sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\lambda f_\lambda$ en celle-ci, nous dirons qu'elle est sommable au sens de l'opérateur, et nous la désignons par $\sum \oplus A_\lambda$. Encore, nous désignons par $\sum \oplus \mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ l'ensemble de toutes les sommes directes $\sum \oplus A_\lambda$ sommables au sens de l'opérateur, et nous l'appelons une somme directe de $\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

(5.1) Quand nous définissons la norme $|A|$ d'une somme directe $A=\sum\oplus A_\lambda$ de $\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ par l'égalité

$$|A|=\text{borné sup}\frac{|\sum_{L_p}\oplus A_\lambda f_\lambda|}{|\sum_{L_p}\oplus f_\lambda|},$$

où $\sum_{L_p}\oplus f_\lambda\neq 0$, $\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ est un anneau des opérateurs sur $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ et faiblement fermé.

(5.2) Les opérateurs U_ω de (3.3), où $\omega(\lambda)$ est une fonction sommable et bornée sur Λ, appartiennent à $\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ et quand nous désignons par $\mathfrak{Z}_\Lambda$ le plus petit anneau des opérateurs qui contient ces opérateurs U_ω, nous avons

$$\mathfrak{Z}''_\Lambda=\mathfrak{Z}'_\Lambda \quad \text{et} \quad \mathfrak{Z}'_\Lambda=\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)\,.$$

D'où, $\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ est le plus grand anneau des opérateurs sur $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ dont le centre est $\mathfrak{Z}_\Lambda$.

(5.3) Quand $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ est continuellement distribuée, $\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ est une somme directe (L_∞) de $\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$.

Remarque. $\sum\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ n'est pas nécessairement une somme directe (L_∞) de $\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$.

6. Etant donné les anneaux $\mathscr{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ des opérateurs tels qu'on ait $\mathscr{M}_\lambda\subseteqq\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\lambda)$ et une somme directe (L_p) $\sum_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$, nous considérons l'ensemble $\mathscr{M}$ de toutes les sommes directes $A=\sum\oplus A_\lambda$ telles qu'on ait $A_\lambda\in\mathscr{M}_\lambda$. Quand il remplit la condition: quelqus soient le sous-ensemble Γ de Λ et l'opérateur $A=\sum\oplus A_\lambda$ définie sur Γ_1 sommable au sens de l'opérateur tel qu'on ait $A_\lambda\in\mathscr{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Gamma)$, il existe un opérateur B de $\mathscr{M}$ tel qu'on ait $A_\lambda=B_\lambda$ sur Γ sauf peut-être un ensemble de la mesure nulle, nous dirons que $\mathscr{M}$ est sommable, que $\mathscr{M}$ est une somme directe des anneaux $\mathscr{M}_\lambda$ et nous la désignons par $\sum\oplus\mathscr{M}_\lambda$.