89. *Sur les coniques dans les espaces à connexion affine ou projective I.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

Kazuo TAKANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

§ 0. *Introduction.* M. M. Mikami[1] a récemment défini et étudié les paraboles dans les espaces d'éléments linéaires à connexion affine. Un espace d'éléments linéaires à connexion affine étant défini comme un espace doué d'une connexion affine $\Gamma^i_j(x, x^{(1)})$ dont les éléments sont des points x^i et des éléments linéaires $x^{(1)i}$, il appelle paraboles les courbes definies par les équations différentielles de la forme

$$(0.1)\qquad \frac{\delta^2 x^{(1)i}}{ds^2}=0\,, \qquad \left(x^{(r)i}=\frac{d^r x^i}{ds^r}\ ;\ i, j, k, \dots=1, 2, \dots, n\right)$$

δ/ds désignant la dérivée covariante le long des courbes par rapport à la connexion affine $\Gamma^i_j(x, x^{(1)})$ de l'espace. Les paraboles étant ainsi définies, il cherche la condition nécessaire et suffisante pour laquelle un système des paths d'ordre 3 défini par les équations différentielles de la forme

$$(0.2)\qquad T^i\equiv x^{(3)i}+A^i_k(x, x^{(1)})x^{(2)k}+B^i(x, x^{(1)})=0\,,$$

où A^i_k et B^i sont des fonctions homogènes en $x^{(1)}$ respectivement de degré 1 et de degré 3, soit le système des paraboles d'un espace d'éléments linéaires à connexion affine. Pour que ce système des paths d'ordre 3 soit le système des paraboles dans un espace d'éléments linéaires à connexion affine, il faut et il suffit que le vecteur contrevariant

$$(0.3)\qquad {}^*B^i=B^i-\frac{1}{3}\,A^i_{j,k}x^{(1)j}x^{(1)k}-\frac{1}{9}\,(2A^i_k-A^i_{m(1)k}x^{(1)m})A^k_j x^{(1)j}$$

s'annule, où nous avons adopté les notations $f_{,k}=\partial f/\partial x^k$ et $f_{(1)k}=\partial f/\partial x^{(1)k}$. Si l'on demande que le système des courbes (0.2) non paramétrisées coïncide avec le système des paraboles, il faut et il suffit pour cela que le vecteur contrevariant ${}^*B^i$ soit proportionnel à $x^{(1)i}$.

MM. H. Hombu et M. Mikami[2] ont continué cette étude des paraboles en se plaçant dans les espaces généralisés des paths de M. J. Douglas. Ils considérent d'abord le contact d'ordre 3 et d'ordre 4 des paraboles dans deux espaces généralisés projectivement liés l'un à l'autre, et ils cherchent ensuite les paraboles communes dans ces deux

1) M. Mikami: On parabolas in the generalized spaces. Japanese Journal of Mathematics, **17** (1940) 185-200.

2) H. Hombu et M. Mikami: Parabolas and projective transformations in the generalized spaces of paths, ibidem, 307-335.

espaces. Enfin ils déterminent les espaces qui ont les paraboles communes et sont projectivement liés l'un à l'autre.

D'autre part, MM. H. Hombu et K. Okada[1)] ont montré que, pour qu'il existe une et une seule parabole par rapport à une connexion affine $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ qui est en contact d'ordre 3 avec une parabole par rapport à une autre connexien affine Γ^i_{jk}, il faut et il suffit que $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ et Γ^i_{jk} soient liés par les équations de la forme

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j p_k+\delta^i_k q_j\,, \tag{0.4}$$

où p_j et q_j sont deux vecteurs covariants arbitraires. Ils appellent (0.4) la transformation projective des connexions affines asymétriques. En suivant la méthode de T. Y. Thomas, ils construisent ensuite une théorie projective des connexions affines asymétriques.

En se plaçant dans un espace à connexion projective et en se servant du repère de M. T. Y. Thomas, MM. H. Hombu et M. Mikami[2)] ont défini les coniques par les équations différentielles de la forme

$$\frac{{}^*\delta^2 x'^\lambda}{dt^2}=0\,, \qquad \left(x'^\lambda=\frac{dx^\lambda}{dt}\,;\ \lambda,\mu,\nu,\ldots=0,1,2,\ldots,n\right) \tag{0.5}$$

${}^*\delta/dt$ désignant la dérivée covariante par rapport aux composantes de la connexion de M. T. Y. Thomas, et ils ont étudié les paramètres projectifs sur les coniques, le contact des coniques de deux connexions et le contact des paraboles et des coniques.

Voilà ce qu'on a étudié jusqu'ici sur les paraboles dans les espaces à connexion affine et les coniques dans les espaces à connexion projective. Mais, il est possible de considérer les coniques même dans un espace à connexion affine. Dans la première partie de cette Note, nous allons donner une autre définition, plus géométrique, des coniques dans un espace à connexion affine, et en étudier quelques propriétés. En ce qui concerne les coniques dans un espace à connexion projective, nous allons les étudier en nous servant de ce qu'on appelle le repère seminaturel de M. É. Cartan. Nous serons ainsi amenés tout naturellement au concept de paramètre projectif sur les coniques, celui-ci étant défini par une dérivée Schwarzienne. De plus, si l'on fixe un hyperplan à l'infini, les coniques ainsi définies deviennent les coniques affines, ainsi peut-on étudier sans difficulté les relations entre les coniques affines et les coniques projectives.

§ 1. *Les coniques dans un espace à connexion affine.*

Considérons un espace à connexion affine rapporté à un système de coordonnées (x^i) et dont la connexion s'exprime par les formules

$$dM=dx^i e_i\,, \qquad de_j=\Gamma^i_{jk}dx^k e_i\,, \tag{1.1}$$

en se servant de ce qu'on appelle le repère naturel. Si l'on considère dans cet espace une courbe $x^i(r)$, le développement de cette courbe et

1) H. Hombu et K. Okada: On the projective theory of asymmetric connections. Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **28** (1941), 357-362.

2) H. Hombu et M. Mikami: Conics in the projectively connected manifolds. Memoires of the Faculty of Science, Kyūsyū Imperial University, **2** (1941), 217-239.

de repère natural attaché à chaque point sur un espace affine tangent sera donné par la considération des équations différentielles

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dr}=\frac{dx^i}{dr}\boldsymbol{e}_i\,,\qquad \frac{d\boldsymbol{e}_j}{dr}=\Gamma^i_{jk}\frac{dx^k}{dr}\boldsymbol{e}_i\,. \tag{1.2}$$

Si l'on obtient une courbe plane après le développement, on l'apelle courbe plane dans l'espace à connexion affine. Pour qu'une courbe soit plane, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{d^3\boldsymbol{M}}{dr^3}+\alpha\frac{d^2\boldsymbol{M}}{dr^2}+\beta\frac{d\boldsymbol{M}}{dr}=0\,,$$

d'où

$$\frac{\delta^3x^i}{dr^3}+\alpha\frac{\delta^2x^i}{dr^2}+\beta\frac{dx^i}{dr}=0\,, \tag{1.3}$$

δ/dr désignant la dérivée covariante le long de la courbe par rapport à la connexion affine Γ^i_{jk}, et α, β certaines constantes.

Or, le paramètre r étant tout à fait arbitraire, si l'on prend un nouveau paramètre s, l'équation (1.3) devient

$$\frac{\delta^3x^i}{ds^3}-\frac{\delta^2x^i}{ds^2}\left[\frac{3\dfrac{d^2r}{ds^2}}{\dfrac{dr}{ds}}-\alpha\frac{dr}{ds}\right]$$
$$-\frac{dx^i}{ds}\left[\frac{\dfrac{d^3r}{ds^3}}{\dfrac{dr}{ds}}-3\left(\frac{\dfrac{d^2r}{ds^2}}{\dfrac{dr}{ds}}\right)^2+\alpha\frac{d^2r}{ds^2}-\beta\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]=0\,.$$

Donc, en choisissant le paramètre s de manière qu'on ait

$$\frac{3\dfrac{d^2r}{ds^2}}{\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2}=\alpha\,, \tag{1.4}$$

on obtient de (1.3)

$$\frac{\delta^3x^i}{ds^3}+k\frac{dx^i}{ds}=0\,, \tag{1.5}$$

k étant une fonction de s. Ce sont des équations des courbes planes dans l'espace à connexion affine par rapport au paramètre spécial s. Ici, le paramètre s est de caractère affine, parce que le terme de δ^2x^i/ds^2 étant absent dans (1.5), le changement du paramètre qui conserve cette propriété doit être de la forme

$$\bar{s}=as+b\,, \tag{1.6}$$

comme le montre l'équation (1.4). Donc, la direction $\dfrac{\delta^2x^i}{ds^2}$ définie en chaque point de la courbe a un sens déterminé et par conséquent nous définissons par $\dfrac{\delta^2x^i}{ds^2}$ la normale affine d'une courbe plane dans un espace à connexion affine.

Cela étant, nous allons chercher la courbe plane dont la normale affine est concourante[1] le long de la courbe. Une direction v^i définie en chaque point de la courbe $x^i(s)$ est dite concourante si elle satisfait aux équations différentielles de la forme

$$\frac{dx^i}{ds}+\frac{\delta\lambda v^i}{ds}=0\,,$$

λ étant une fonction appropriée de s. En effet, l'équation ci-dessus montre que

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{M}+\lambda v^i\boldsymbol{e}_i)=0\,,$$

et par consequent, la direction v^i passe toujours par le point fixe $\boldsymbol{M}+\lambda v^i\boldsymbol{e}_i$.

Si l'on demande que la normale affine d'une courbe plane dans un espace à connexion affine soit concourante le long de la courbe, on doit avoir

$$\frac{dx^i}{ds}+\frac{\delta}{ds}\left(\lambda\,\frac{\delta^2x^i}{ds^2}\right)=0\,,$$

d'où

$$\frac{\delta^3x^i}{ds^3}+\frac{d\log\lambda}{ds}\,\frac{\delta^2x^i}{ds^2}+\frac{1}{\lambda}\,\frac{dx^i}{ds}=0\,.$$

La courbe étant plane, et la paramètre s étant affine, on en conclut que

$$\frac{d\log\lambda}{ds}=0\qquad \text{d'où}\qquad \lambda=\text{constante.}$$

Inversement, si le coefficient k dans (1.5) est une constante, on voit facilement que la normale affine d'une courbe plane dans un espace à connexion affine est concourante le long de la courbe. Nous appelons une telle courbe conique dans l'espace à connexion affine.

Les équations des coniques affines étant (1.5), le coefficient k n'est pas un invariant affine, parce que si l'on effectue un changement du paramètre affine (1.6), le coefficient k subit une transformation de la forme

$$\bar{k}=\frac{1}{a^2}\,k\,.$$

Mais cette équation montre que le signe de k est un invariant affine, donc on obtient la classification suivante des coniques. Les coniques s'appellent éllipses, paraboles ou hyperboles suivant que le coefficient $k>0$, $k=0$ ou $k<0$. Si $k=0$, les équations différentielles des coniques montrent que la normale affine est toujours parallèle le long de la courbe. Ce sont les paraboles de M. M. Mikami[2].

1) Voir, K. Yano: Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann, Proc. **19** (1943), 189-197.

2) M. Mikami: On parabolas in the generalized spaces, déjà cité.

§ 2. *Les coniques dans un espace à connexion projective.*

Plaçons nous d'abord dans un espace projectif ordinaire et rapportons-le à un système de coordonnées homogènes X^λ. Alors, les coniques peuvent s'exprimer par les équations de la forme

$$\rho X^\lambda = a^\lambda t^2 + b^\lambda t + c^\lambda ,$$

où ρ est un facteur dépendant de t, et $a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda$ des constantes et enfin t un paramètre projectif. Donc, en désignant par A_0 le point courant des coniques, on aura

$$\frac{d^3}{dt^3} \rho A_0 = 0 , \tag{2.1}$$

comme les équations différentielles définissant les coniques dans un espace projectif ordinaire.

Cela étant, plaçons nous ensuite dans un espace à connexion projective rapporté à un système de coordonnées (x^i) et attachons, à chaque point de l'espace, ce qu'on appelle le repère semi-naturel $[A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n]$, le A_0 étant le point de contact. Alors, la connexion projective de l'espace s'exprime par[1)]

$$\begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + dx^i A_i , \\ dA_j = \omega_j^0 A_0 + \omega_j^i A_i , \end{cases} \tag{2.2}$$

où

$$\omega_0^0 = dx^0 = p_k dx^k , \qquad \omega_j^0 = \omega_{jk}^0 dx^k , \qquad \omega_j^i = \omega_{jk}^i dx^k \tag{2.3}$$

sont des formes de Pfaff. La connexion projective étant complètement définie par des formes de Pfaff $\omega_\mu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \omega_0^0$, nous posons

$$\Pi_{jk}^0 = \omega_{jk}^0 , \qquad \Pi_{jk}^i = \omega_{jk}^i - \delta_j^i p_k , \tag{2.4}$$

et nous les appelons composantes de la connexion projective.

Si l'on effectue le changement du repère semi-naturel

$$\bar{A}_0 = A_0 , \qquad \bar{A}_i = \varphi_i A_0 + A_i , \tag{2.5}$$

les composantes de la connexion projective subissent les transformations

$$\begin{cases} \bar{p}_k = p_k - \varphi_k , \\ \bar{\Pi}_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0 + \varphi_{j,k} - \varphi_i \Pi_{jk}^i - \varphi_j \varphi_k , \\ \bar{\Pi}_{jk}^i = \Pi_{jk}^i + \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j , \end{cases} \tag{2.6}$$

ce qui correspond au changement de l'hyperplan à l'infini. En posant $p_k = \varphi_k$, nous pouvons rendre nulle la forme de Pfaff dx^0, et les équations définissant la connexion projective prennent la forme

$$\begin{cases} dA_0 = dx^i A_i , \\ dA_j = \Pi_{jk}^0 dx^k A_0 + \Pi_{jk}^i dx^k A_i . \end{cases} \tag{2.7}$$

---

1) K. Yano: Les espaces à connexion projective et la geométrie projective des paths. Thèse, Paris, (1938), et Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **24** (1938), 395-464.

Nous appellerons un tel repère le repère de M. O. Veblen. La torsion et la courbure de l'espace étant respectivement données par

$$(2.8)\qquad \begin{cases} \Omega^i_{.jk}=\Pi^i_{jk}-\Pi^i_{kj}\,, \\ \Omega^i_{.jkh}=\Pi^i_{jk,h}-\Pi^i_{jh,k}+\Pi^a_{jk}\Pi^i_{ah}-\Pi^a_{jh}\Pi^i_{ak}+\Pi^0_{jk}\delta^i_h-\Pi^0_{jh}\delta^i_k \\ \qquad -\delta^i_j(\Pi^0_{kh}-\Pi^0_{hk})\,, \end{cases}$$

nous supposerons que l'espace soit sans torsion :

$$(2.9)\qquad \Pi^i_{jk}=\Pi^i_{kj}\,.$$

Si l'on suppose de plus que le tenseur contracté $\Omega^i_{.jki}$ soit nul, on obtient, de la deuxième équation de (2.8),

$$(2.10)\qquad \Pi^0_{jk}=-\frac{1}{n^2-1}\,(n\Pi_{jk}+\Pi_{kj})\,,$$

où $\Pi_{jk}=\Pi^i_{.jki}$ et les $\Pi^i_{.jkh}$ sont les composantes du tenseur de courbure formées avec les Π^i_{jk}. Dans ce cas, la connexion s'appelle normale. On voit que si l'on se donne les composantes Π^i_{jk} d'une connexion affine, on peut en construire les composantes Π^0_{jk} et Π^i_{jk} d'une connexion projective normale en utilisant les formules (2.10).

Cela dit, nous définissons la conique de l'espace à connexion projective par l'équation différentielle

$$(2.11)\qquad \frac{d^3}{dt^3}\,\rho A_0=0\,,$$

qui montre que si l'on développe cette courbe sur l'espace tangent projectif en un point de la courbe, on obtiendra une conique projective ordinarie. L'équation (2.11) nous donne

$$(2.12)\qquad \frac{d^3\rho}{dt^3}\,A_0+3\,\frac{d^2\rho}{dt^2}\,\frac{dA_0}{dt}+3\,\frac{d\rho}{dt}\,\frac{d^2A_0}{dt^2}+\rho\,\frac{d^3A_0}{dt^3}=0\,.$$

Or, en se servant d'un repère semi-naturel, on a

$$\frac{dA_0}{dt}=\frac{dx^0}{dt}\,A_0+\frac{dx^i}{dt}\,A_i\,,$$

$$\frac{d^2A_0}{dt^2}=\left[\frac{d^2x^0}{dt^2}+\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2+\Pi^0_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,\frac{dx^k}{dt}\right]A_0$$
$$+\left[2\,\frac{dx^0}{dt}\,\frac{dx^i}{dt}+\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Pi^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,\frac{dx^k}{dt}\right]A_i\equiv\alpha^0A_0+\alpha^iA_i\,,$$

$$\frac{d^3A_0}{dt^3}=\left[\frac{d\alpha^0}{dt}+\alpha^0\,\frac{dx^0}{dt}+\Pi^0_{jk}\alpha^j\,\frac{dx^k}{dt}\right]A_0$$
$$+\left[\alpha^0\,\frac{dx^i}{dt}+\alpha^i\,\frac{dx^0}{dt}+\frac{d\alpha^i}{dt}+\Pi^i_{jk}\alpha^j\,\frac{dx^k}{dt}\right]A_i\,.$$

En substituant ces équations dans (2.12), et en posant séparément nuls les coefficients de A_0 et de A_i, on trouve

$$\text{(2.13)}\qquad \frac{d^3\rho}{dt^3}+3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{dx^0}{dt}+3\frac{d\rho}{dt}\alpha^0+\rho\left[\frac{d\alpha^0}{dt}+\alpha^0\frac{dx^0}{dt}+\Pi^0_{jk}\alpha^j\frac{dx^k}{dt}\right]=0\,,$$

$$\text{(2.14)}\qquad 3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{dx^i}{dt}+3\frac{d\rho}{dt}\alpha^i$$
$$+\rho\left[\alpha^0\frac{dx^i}{dt}+\alpha^i\frac{dx^0}{dt}+\frac{d\alpha^i}{dt}+\Pi^i_{jk}\alpha^j\frac{dx^k}{dt}\right]=0\,.$$

Cela étant, introduisons un paramètre s, arbitraire pour le moment, et posons

$$\text{(2.15)}\qquad a^0=\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\,,\qquad a^i=\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\,,$$

alors on aura

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\rho'}{t'}\,,\quad \frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{\rho''}{t'^2}-\frac{\rho't''}{t'^3}\,,\quad \frac{d^3\rho}{dt^3}=\frac{\rho'''}{t'^3}-\frac{3\rho''t''}{t'^4}-\frac{\rho't'''}{t'^4}+\frac{3\rho't''^2}{t'^5}\,,$$

$$\frac{dx^\lambda}{dt}=\frac{1}{t'}\frac{dx^\lambda}{ds}\,,\quad \frac{d^2x^\lambda}{dt^2}=\frac{1}{t'^2}\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}-\frac{t''}{t'^3}\frac{dx^\lambda}{ds}\,,$$

$$\alpha^0=\frac{1}{t'^2}\left[\frac{d^2x^0}{ds^2}+\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\right]-\frac{t''}{t'^3}\frac{dx^0}{ds}+\frac{1}{t'^2}a^0\,,$$

$$\alpha^i=\left(\frac{2}{t'^2}\frac{dx^0}{ds}-\frac{t''}{t'^3}\right)\frac{dx^i}{ds}+\frac{1}{t'^2}a^i\,,$$

$$\frac{d\alpha^0}{dt}+\Pi^0_{jk}\alpha^j\frac{dx^k}{dt}=\frac{1}{t'^3}\frac{d^3x^0}{ds^3}-\frac{3t''}{t'^4}\frac{d^2x^0}{ds^2}+\frac{2}{t'^3}\frac{dx^0}{ds}\frac{d^2x^0}{ds^2}$$
$$-\frac{2t''}{t'^4}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2-\left(\frac{t'''}{t'^4}-\frac{3t''^2}{t'^5}\right)\frac{dx^0}{ds}+\left(\frac{2}{t'^3}\frac{dx^0}{ds}-3\frac{t''}{t'^4}\right)a^0$$
$$+\frac{1}{t'^3}\left(\frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}\right),$$

$$\frac{d\alpha^i}{dt}+\Pi^i_{jk}\alpha^j\frac{dx^k}{dt}=\left(\frac{2}{t'^3}\frac{d^2x^0}{ds^2}-\frac{4t''}{t'^4}\frac{dx^0}{ds}-\frac{t'''}{t'^4}+\frac{3t''^2}{t'^5}\right)\frac{dx^i}{ds}$$
$$+\left(\frac{2}{t'^3}\frac{dx^0}{ds}-\frac{3t''}{t'^4}\right)a^i+\frac{1}{t'^3}\left(\frac{da^i}{ds}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}\right),$$

où la prime représente la dérivée ordinaire par rapport au paramètre s.

En substituant ces équations dans (2.13) et (2.14), on obtient respectivement

$$\text{(2.16)}\qquad \frac{\rho'''}{\rho t'^3}-\frac{3\rho''t''}{\rho t'^4}-\frac{\rho't'''}{\rho t'^4}+\frac{3\rho't''^2}{\rho t'^5}+\frac{1}{t'^3}\frac{d^3x^0}{ds^3}+\frac{3}{t'^3}\frac{d^2x^0}{ds^2}\frac{dx^0}{ds}$$
$$+\left(\frac{3\rho'}{\rho t'^3}-\frac{3t''}{t'^4}\right)\frac{d^2x^0}{ds^2}+\frac{1}{t'^3}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^3+\left(\frac{3\rho'}{\rho t'^3}-\frac{3t''}{t'^4}\right)\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2$$
$$+\left(\frac{3\rho''}{\rho t'^3}-\frac{6\rho't''}{\rho t'^4}-\frac{t'''}{t'^4}+\frac{3t''^2}{t'^5}\right)\frac{dx^0}{ds}$$
$$+\left(\frac{3\rho'}{\rho t'^3}+\frac{3}{t'^3}\frac{dx^0}{ds}-\frac{3t''}{t'^4}\right)a^0+\frac{1}{t'^3}\left(\frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}\right)=0\,,$$

$$\begin{aligned}(2.17)\quad &\left[\frac{3}{t'^3}\frac{d^2x^0}{ds^2}+\frac{3}{t'^3}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2-\frac{6t''}{t'^4}\frac{dx^0}{ds}+\frac{a^0}{t'^3}+\frac{6\rho'}{\rho t'^3}\frac{dx^0}{ds}+\frac{3\rho''}{\rho' t'^3}\right.\\ &\left.-\frac{6\rho' t''}{\rho t'^4}-\frac{t'''}{t'^4}+\frac{3t''^2}{t'^5}\right]\frac{dx^i}{ds}+\left(\frac{3}{t'^3}\frac{dx^0}{ds}-\frac{3t''}{t'^4}+\frac{3\rho'}{\rho t'^3}\right)a^i\\ &+\frac{1}{t'^3}\left(\frac{da^i}{ds}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}\right)=0\,.\end{aligned}$$

Or, le paramètre s était jusqu'ici tout à fait arbitraire, nous allons choisir ce paramètre de manière qu'on ait

$$(2.18)\qquad x^0=\log\left(\frac{1}{\rho}\frac{dt}{ds}\right).$$

Alors, les dérivées successives de x^0 étant données par

$$\frac{dx^0}{ds}=\frac{t''}{t'}-\frac{\rho'}{\rho}\,,$$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2}=\frac{t'''}{t'}-\frac{t''^2}{t'^2}-\frac{\rho''}{\rho}+\frac{\rho'^2}{\rho^2}\,,$$

$$\frac{d^3x^0}{ds^3}=\frac{t''''}{t'}-\frac{3t''t'''}{t'^2}+\frac{2t''^3}{t'^3}-\frac{\rho'''}{\rho}+\frac{3\rho'\rho''}{\rho^2}-\frac{2\rho'^3}{\rho^3}\,,$$

les équations (2.16) et (2.17) nous donnent respectivement

$$(2.19)\qquad \frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}+\frac{t''''}{t'}-\frac{4t''t'''}{t'^2}+\frac{3t''^3}{t'^3}=0\,,$$

$$(2.20)\qquad \frac{da^i}{ds}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{dx^i}{ds}+\left(2\frac{t'''}{t'}-3\frac{t''^2}{t'^2}+a^0\right)\frac{dx^i}{ds}=0\,.$$

En désignant par $\{t, s\}$ la dérivée Schwarzienne de t par rapport à s:

$$\{t,s\}=\frac{t'''}{t'}-\frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2,$$

nous obtiendrons enfin

$$(2.21)\qquad \frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}+\frac{d}{ds}\{t,s\}=0\,,$$

$$(2.22)\qquad \frac{da^i}{ds}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}+(2\{t,s\}+a^0)\frac{dx^i}{ds}=0\,.$$

Ce sont les équations differéntielles des coniques et du paramètre projectif t sur elles.

Dans la deuxième partie, nous allons étudier la relation entre les coniques affines et les coniques projectives ainsi définies.