88. *Ein Satz über die p-wertigen Funktionen.*

Von Tokunosuke YOSIDA.
Marineingenieurschule.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

Neuerdings haben wir den folgenden Satz[1] bewiesen:

$$w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

sei in $|z|<1$ *regulär und* p*-wertig. Dann ist für* $|z|<1$

$$|w(z)|\geqq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}.$$

Nun haben wir eine bessere Abschätzung. *Es ist für* $|z|<1$

$$|w(z)|\geqq\left(\frac{1}{1.0617}\right)^p\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}. \tag{1}$$

Beweis. Es sei $\big(w(z)\big)^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{z}+b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n+\cdots$, so ist $b_0=-\frac{a_{p+1}}{p}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}n\,|b_n|^2\leqq 1$[2]. Anderseits ist $|a_{p+1}|\leqq 2p$[2].

Daher ist $|b_0|\leqq 2$, und für $|z|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{n-1}\Big|^2\leqq\sum_{n=1}^{\infty}n\,|b_n|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{2n-2}}{n}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{2n-2}}{n}\leqq\log 4\,.$$

Damit ist für $|z|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Big|1+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{n+1}\Big|\leqq 1+2|z|+|z|^2\sqrt{\log 4}\leqq(1.0617)\,(1+|z|)^2.$$

Folglich besteht (1) für $|z|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Insbesondere gilt es für $|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|w(z)|\geqq\left(\frac{|z|}{1+2|z|+|z|^2\sqrt{\log 4}}\right)^p\geqq\left(\frac{1}{4.2468}\right)^p.$$

Da $\big(w(z)\big)^{\frac{1}{p}}$ ist in $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ schlicht[2] und $w(z)$ ist in $|z|<1$ p-wertig, so ist für $1>|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|w(z)|\geqq\left(\frac{1}{4.2468}\right)^p>\left(\frac{1}{1.0617}\right)^p\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}.$$

Schliesslich ist unser Satz vollständig bewiesen worden.

---

1) T. Yosida, Proc. **20** (1944).
2) Cf. loc. cit.