87. Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes.

Von Ken'iti KOSEKI.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Kyoto.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

Eine Teilmenge b aus einer Menge a heisst „Tranche fondamentale" von a, wenn b ein Kontinuum ist, das die Summe von endlicher oder abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in a und unzerlegbaren Kontinuen aus a ist, und das bezüglich solcher Eigenschaft grösste Teilmenge aus a ist. Eine Menge a heisst „monostratique", wenn a aus nur einzigem „Tranche fondamentale" besteht.

Nach der Untersuchungen von C. Kuratowski[1], lässt sich ein beschränktes Kontinuum r, das gemeinsame Begrenzung[2] von zwei Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und nicht monostratique ist, in Teilkontinuen „Tranches fondamentales" zyklisch zerlegen. Dabei heisst Zerlegung $r=\sum t_x$ zyklisch, wenn t_x „Tranche fondamentale" ist und zwei verschiedene „Tranches fondamentales" zueinander punktfremd sind, und wenn Index x Kreisperipherie durchschreitet und aus Beziehung $\lim x_n=x_0$, Beziehung $\limsup t_{x_n} < t_{x_0}$ folgt.

In dieser Note[3] will ich nachrichten meine neueren Untersuchungen über die Menge von den Punkten von r, welche zu demselben „Tranche fondamentale" gehören und allseitig erreichbar von einem von den zwei Gebieten aus sind. Zu diesem Zweck behandle ich erstens die Menge von den Punkten, die erreichbar gleichzeitig von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ aus sind.

Satz I. Sei r eine beschränkte Menge, die die gemeinsame Begrenzung von zwei Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist. Dann gibt es in jedem Häufungskontinuum aus r höchstens nur einzigen Punkt, der erreichbar gleichzeitig von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ aus ist.

Für Beweisführung dieses Satzes, wie auch für die von folgender drei Sätze II, III und IV, ist der folgende Satz von A. Rosenthal[4] höchst nützlich:

Die Summe von zwei beschränkten Kontinuen t_1 und t_2, die zwischen den Punten A und B irreduzibel sind und ausser A und B keine Punkte gemein haben, bestimmt in der Ebene genau zwei Gebiete, die von ganzen Kontinuum t_1+t_2 begrenzt werden.

Von Satze I wird der Satz von A. Schoenflies über dem umgekehrten Problem von Jordanschem Kurven Satze folgenderweise erweitert:

1) C. Kuratowski. Sur la structure des frontières communes à deux régions. Fund. Math. **12** (1928).

2) Diese Menge ist von grosser Bedeutung für Untersuchungen von „Coupures Irréductibles".

3) Im folgenden liegt Euklidische Ebene stets zugrunde.

4) A. Rosenthal. Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua. Sgb. Bay. Ak. Wiss. (1919).

Sei r eine beschränkte Menge, die die gemeinsame Begrenzung von Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist, und sei jeder Punkt von r ausser einer diskontinuierlichen Menge erreichbar gleichzeitig von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ aus, dann ist r eine Jordansche einfache geschlossene Kurve.

Satz II. Sei r eine beschränkte Menge, die die gemeinsame Begrenzung von Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist, dann gibt es in jedem unzerlegbaren Kontinuum aus r höchstens zwei Punkte, die erreichbar gleichzeitig von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ aus sind. Wenn es zwei solche Punkte gibt, dann ist jenes unzerlegbare Kontinuum irreduzibel zwischen zwei solchen Punkten.

Wenn r selbst ein unzerlegbares Kontinuum ist, dann gibt es in r höchstens nur einzigen Punkt, der erreichbar gleichzeitig von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist.

Zweitens beschäftige ich mich näher mit der gemeinsamen Begrenzung r von zwei Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und untersuche die allseitige Erreichbarkeit von einem der beiden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ aus.

Satz III[1]. Sei r eine beschränkte Menge, die die gemeinsame Begrenzung von Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist, dann in jedem Häufungskontinuum in r gibt es höchstens zwei Punkte, die allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2$ aus sind. Dasselbe gilt für $\mathfrak{G}_1$.

In der Tat sei u ein Häufungskontinuum in r und seien A, B und C drei Punkte von u, die allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2$ aus sind. Zuerst gibt es in $\mathfrak{G}_2$ einen Querschnitt, der A und B verbindet. Jenen Querschnitt bezeichne ich mit q. $\mathfrak{G}_2$ wird von q in zwei Teilgebiete $\mathfrak{G}_2'$ und $\mathfrak{G}_2''$ zerlegt.

Da aber u ein beschränktes Kontinuum ist, gibt es in u ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum, das ich mit p bezeichne.

Die Begrenzung einer von $\mathfrak{G}_2'$ und $\mathfrak{G}_2''$, etwa $\mathfrak{G}_2'$, ist das Kontinuum $p+q$, und die Begrenzung von $\mathfrak{G}_2''$ ist $r+q$. Hierbei unterscheide ich zwei Fälle.

1 Fall. p enthält den Punkt C.

2 Fall. p enthält nicht den Punkt C.

In jedem dieser zwei Fälle gelangen wir, unter der Annahme dass A, B und C allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2$ aus sind, zu einem Widerspruch.

Satz IV[2]. Sei r eine beschränkte Menge, die die gemeinsame Begrenzung von zwei Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist, dann gibt es in jedem unzerlegbaren Kontinuum aus r höchstens zwei Punkte, die allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2$ aus sind. Dasselbe gilt für $\mathfrak{G}_1$.

In der Tat sei u ein unzerlegbares Kontinuum aus r und seien A, B und C drei Punkte von u, die allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2$ aus sind. Dabei muss das Kontinuum u zwischen A und B oder A und C irreduzibel sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, kann man annehmen dass u ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum ist.

Ebenfalls muss das Kontinuum u zwischen C und A oder C und B irreduzibel sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, kann man annehmen dass u ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum ist.

1) Vgl. B. Kaufmann. Über die allseitige und nicht allseitige Erreichbarkeit bei geschlossenen Kurven. Fund. Math., **18** (1932).

2) In diesem Satze möge r selbst ein unzerlegbares Kontinuum sein.

Dann gibt es zuerst in $\mathfrak{G}_2$ ein Querschnitt, der A und B verbindet. Jenen Querschnitt bezeichne ich mit q. $\mathfrak{G}_2$ wird von q in zwei Teilgebiete $\mathfrak{G}_2'$ und $\mathfrak{G}_2''$ zerlegt.

Die Begrenzung einer von beiden $\mathfrak{G}_2'$ und $\mathfrak{G}_2''$, etwa $\mathfrak{G}_2'$, ist das Kontinuum $u+q$. Hierbei unterscheide ich zwei Fälle.

1 Fall. C ist ein Grenzpunkt von $\mathfrak{G}_2''$.

2 Fall. C ist nicht ein Grenzpunkt von $\mathfrak{G}_2''$.

In jedem dieser zwei Fälle gelangen wir, bei der Annahme dass A, B und C allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2'$ aus sind, zu einem Widerspruch.

Aus Sätze III und IV folgen sofort der zwei

Satz V. Sei r eine beschränkte Menge, die gemeinsame Begrenzung von Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, dann in jedem „Tranche fondamentale" von r gibt es höchstens abzählbare Punkte, die von $\mathfrak{G}_2$ aus allseitig erreichbar sind. Dasselbe gilt für $\mathfrak{G}_1$.

Satz VI. Sei r eine beschränkte Menge, die gemeinsame Begrenzung von zwei Gebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, und sei r „monostratique", dann gibt es in r höchstens abzählbare Punkte, die allseitig erreichbar von $\mathfrak{G}_2$ aus sind. Dasselbe gilt für $\mathfrak{G}_1$.

Es ist mir noch ungelöst, ob die Umkehrung des Satzes VI gelte oder nicht. Aber ich vermute dass dieses umgekehrte Problem mit den Primenden von dritter und vierter Arten von C. Carathéodory im engen Zusammenhang steht. Diesen Zusammenhang will ich in anderer Gelegenheit behandeln.