86. *Sur les anneaux des opérateurs, I.*

Par Masae ORIHARA.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1944.)

Dans leurs mémoires importantes[1], MM. F. J. Murray et J. v. Neumann ont recherchés des anneaux des opérateurs linéaires et bornés sur l'espace hilbertien $\mathfrak{H}$. D'après ceux-ci, quand un anneau $\mathcal{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{H}$ est un facteur, nous pouvons définir une dimension numérique pour les sous-espaces $\mathfrak{M}$ linéaires et fermés tels qu'on ait $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$, et le classifier en les cinq types I_n, I_∞, II_1, II_∞ et III_∞ à ce point. De plus, au grâce de celle-ci nous pouvons definir la trace pour les facteurs de type I_n ou bien II_1.

Cependant, d'après l'idée de M. S. Banach sur l'existence des fonctionnelles linéaires, nous pouvons, donner d'abord la trace sur les facteurs et puis la dimension numérique. Dans cette methode, il n'est pas necéssaire de supposer que $\mathfrak{H}$ soit séparable et que $\mathcal{M}$ soit un facteur. Le but de cette note est de rechércher la structure des anneaux des opérateurs de $\mathfrak{H}$ sur ce point.

§ **1.** Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien général (il n'est pas nécessairement séparable), et $\mathscr{B}$ l'ensemble tous les opérateurs linéaires et bornés sur $\mathfrak{H}$.

Quand un sous-ensemble $\mathcal{M} \subset \mathscr{B}$ satisfait aux conditions suivantes,

(1) quelques soient A, B de $\mathcal{M}$, $A \pm B$, AB, A^*, aA (a est un nombre complexe) appartiennent à $\mathcal{M}$,

(2) l'opérateur unité I appartient à $\mathcal{M}$,

(3) $\mathcal{M}$ est faiblement fermé,

nous l'appelons un anneau des opérateurs.

Etant donné un anneau $\mathcal{M}$ des opérateurs, nous désignons par $\mathcal{M}'$ l'ensemble de tous les opérateurs A de $\mathscr{B}$ tels que A et A^* soient en même temps commutatifs avec chaque élément de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^H$ celui de tous les opérateurs hermitiens de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^U$ celui de tous les opérateurs unitaires et $\mathcal{M}^P$ celui de tous les opérateurs projectifs.

Puis, si l'on a $(Af, f) \geqq 0$ pour tous les éléments f de $\mathfrak{H}$, où A est un élément de $\mathcal{M}^H$, on pose $A \geqq 0$, et si l'on a $A - B \geqq 0$, on pose $A \geqq B$ ou bien $B \leqq A$. Si l'on a $A \geqq 0$ et on n'a pas $A = 0$, on pose $A > 0$. Nous avons alors

(1) $\mathcal{M}^H$ est un système demi-ordonné par rapport à la relation $\geqq$, c'est-à-dire, (α) $A \geqq B$ et $B \geqq A$ entrainent $A = B$, (β) $A \geqq B$ et $B \geqq C$ entrainent $A \geqq C$,

(2) $A \geqq 0$ et $B \geqq 0$ entrainent $A + B \geqq 0$,

(3) si l'on a $A \geqq B$, on a $aA \geqq aB$ ou bien $aA \leqq aB$ suivant a est un nombre non-negatif ou bien non-positif,

---

1) F. J. Murray and J. v. Neumann, On Rings of Operators, Annals of Math. **37** (1936); On Rings of Operators II, Trans. of Amer. Math. Soc. **41** (1937); J. v. Neumann, On Rings of Operators III, Annals of Math. **41** (1940).

(4) I appartient à $\mathcal{M}^H$ et $I>0$; de plus, quelque soit A de $\mathcal{M}^H$, il existe un nombre positif a tel que $aI \geqq A \geqq -aI$.

Maintenant, si, pour deux éléments A, B de $\mathcal{M}$, il existe U de $\mathcal{M}^U$ tel que $U^{-1}AU=B$, nous le désignons par $A \cong B$. C'est la relation du congruence. En effet, elle remplit la condition du congruence, c'est-à-dire, elle est symétrique, réflexive et transitive.

On dit qu'un élément A de $\mathcal{M}^H$ est fini, si $A \cong B$ et $A \geqq B$ entraine $A=B$. Alors, d'après M. M. Kondô[2], nous pouvons classifier $\mathcal{M}^H$ en trois types comme il suit.

I. *Type fini* est le cas où l'élément unité de $\mathcal{M}^H$ est fini.

II. *Type infini* est le cas où l'élément unité de $\mathcal{M}^H$ n'est pas fini, mais il y a au moin un élément fini dans $\mathcal{M}^H$.

III. *Type purement infini* est le cas où tous les éléments de $\mathcal{M}^H$ ne sont pas fini.

Or, puisque chaque élément A de $\mathcal{M}$ peut être représenté comme une somme de deux éléments de $\mathcal{M}^H$, c'est-à-dire, $A=B+iC$, où $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$ et $C=-\frac{1}{2}i(A-A^*)$, nous pouvons classifier $\mathcal{M}$ en le type I, II ou bien III, suivant que $\mathcal{M}^H$ est de celui de I, II ou bien III.

§ **2.** Quand une fonction $T(A)$ définie sur tous les éléments d'un anneau $\mathcal{M}$ remplit les conditions suivantes,

(1) $T(I)=1$,

(2) $T(\alpha A)=\alpha T(A)$ pour un nombre complexe α,

(3) $T(A+B)=T(A)+T(B)$,

(4) si $A \geqq 0$, nous avons $T(A) \geqq 0$,

(5) $T(A^*)=\overline{T(A)}$,

(6) $T(AB)=T(BA)$,

(7) si $U \in \mathcal{M}^U$, nous avons $T(U^{-1}AU)=T(A)$,

(8) $T(A)$ est finie pour tout A de $\mathcal{M}$,

nous l'appelons une *trace* des éléments de $\mathcal{M}$. Pour voir l'existence de la trace, nous démontrons d'abord le

Lemme 1. Si $\mathcal{M}^H$ est du type fini, il existe une fonction $T(A)$ sur $\mathcal{M}^H$ qui satisfait aux conditions (1), (3), (4), (7), (8) *de la trace et*

(2′) $T(tA)=tT(A)$ *pour un nombre réel t.*

Démonstration. Nous le voyons par la méthode de l'existence et de l'extension des fonctionnelles de S. Banach[3].

Pour un élément A de $\mathcal{M}^H$, nous choisissons un nombre réel $\alpha(A:U_1, \dots, U_n)$ pour U_i $(i=1, 2, \dots, n)$ de $\mathcal{M}^U$ de manière que la borne supérieure de $\sum_{i=1}^{n} U_i^{-1}U^{-1}AUU_i$ pour $U \in \mathcal{M}^U \leqq \alpha(A\,;U_1, \dots, U_n)$, et nous désignons par $U(A)$ la borne inférieure de $\alpha(A\,;U_1, \dots, U_n)/n$ quand n et U_i se varient. Alors, $U(A)$ jouit des propriétés suivantes.

(I_1) $U(I)=1$.

(I_2) $U(tA)=tU(A)$ pour un nombre non-negatif t.

(I_3) $U(A+B) \leqq U(A)+U(B)$.

2) M. Kondô, Sur la notion de la dimension, Proc. **19** (1943), 215.

3) S. Banach, Théorie des opérations linéaires. (1932). p. 27.

(I_4) $A \geqq 0$ entraine $U(A) \geqq 0$.
(I_5) $A \cong B$ entraine $U(A) = U(B)$.

En effet, (I_4), (I_5) sont evidents. $I \cong aI$ entraine $a=1$ et donc nous avons $U(I)=1$ d'après la définition. Comme $A \cong B$ entraine $tA \cong tB$, $\sum_{i=1}^{n} A^{(i)} \leqq aI$, où $A^{(i)} \cong A$ $(i=1,2,\dots,n)$, entraine aussi pour $t>0$ $\sum_{i=1}^{n} (tA)^{(i)} \leqq atI$, alors $U(tA)=tU(A)$, et $U(0)=0$, d'où nous avons (I_2) pour $t \geqq 0$. Pour voir (I_3), etant donné un nombre positif ε, nous prenons un nombre naturel k et les éléments U_i $(i=1,2,\dots,k)$ tels que $a(A\,;U_1,\dots,U_k)/k \leqq U(A)+\varepsilon$. Il existe de même le nombre l et les éléments V_i $(i=1,2,\dots,l)$ tels que $a(B\,;V_1,\dots,V_l)/l \leqq U(B)+\varepsilon$. Or, nous avons

$$a(A+B\,;U_1V_1,\dots,U_kV_l) \leqq \frac{1}{k}\big(a(A\,;U_1,\dots,U_k)\big)+\frac{1}{l}\big(a(B\,;V_1,\dots,V_l)\big)$$

et donc
$$U(A+B) \leqq U(A)+U(B)+2\varepsilon,$$

Par conséquent, $U(A+B) \leqq U(A)+U(B)$. En autre part, nous avons $0=U(0) \leqq U(A)+U(-A)$, donc $U(A) \geqq -U(-A)$, et pour $t \leqq 0$ $tU(A) \leqq -tU(-A)=U(tA)$. D'où nous avons toujours $tU(A) \leqq U(tA)$.

Maintenant, en désignant par $\mathscr{M}_1$ l'ensemble tous les éléments de la forme tI, nous posons $V(tA)=tU(A)$ sur tout A de $\mathscr{M}_1$. $V(A)$ jouit alors des propriétés suivantes sur $\mathscr{M}_1$.

(II_1) $V(I)=1$.
(II_2) $V(tA)=tV(A)$ pour un nombre réel t.
(II_3) $V(A+B)=V(A)+V(B)$.
(II_4) $A \geqq 0$ entraine $V(A) \geqq 0$.
(II_5) $A \cong B$ entraine $V(A)=V(B)$.
(II_6) $V(A) \leqq U(A)$ pour chaque élément A de $\mathscr{M}_1$.

Puis, nous rangeons tous les éléments de $\mathscr{M}^H$ en une suite bien ordonnée :

$$\text{(i)} \qquad A_0, A_1, \dots, A_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \eta)$$

où $A_0=I$. En désignant par A_{ξ_1} le premier élément de la suite (i) qui n'appartient pas à $\mathscr{M}_1$, nous prenons $A_{\xi_1}^{(i)}$ $(i=1,2,\dots,l)$ tels qu'on ait $A_{\xi_1}^{(i)} \cong A_{\xi_1}$, et choisissons pour deux éléments B_1, B_2 de $\mathscr{M}_1$ les éléments $B_1^{(i)}, B_2^{(j)}$ $(i,j=1,2,\dots,l)$ de $\mathscr{M}_1$ de manière que $B_1 \cong B_1^{(i)}$ et $B_2 \cong B_2^{(j)}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} V\Big(\sum_{i=1}^{l} B_2^{(i)}\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{l} B_1^{(i)}\Big) &= V\Big(\sum_{i=1}^{l}(B_2^{(i)}-B_1^{(i)})\Big) \leqq U\Big(\sum_{i=1}^{l}(B_2^{(i)}-B_1^{(i)})\Big) \\ &= U\Big(\sum_{i=1}^{l}(B_2^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})+\Big(-\sum_{i=1}^{l}(B_1^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big)\Big) \leqq U\Big(\sum_{i=1}^{l}(B_2^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big) \\ &\quad + U\Big(-\sum_{i=1}^{l}(B_1^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big), \end{aligned}$$

et donc

$$-U\Big(-\sum_{i=1}^{l}(B_1^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{l} B_1\Big) \leqq U\Big(\sum_{i=1}^{l}(B_2^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{l} B_2^{(i)}\Big).$$

Nous désignons par m et M respectivement la borne supérieure du côté gauche et la borne inférieure du côté droit de cette inégalité. Nous avons évidemment $m \leqq M$. Or, si nous prenons un nombre a_{ξ_1} tel que $m \leqq a_{\xi_1} \leqq M$, nous avons pour tous éléments B de $\mathcal{M}_1$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{1}{l}\Big\{-U\Big(-\sum_{i=1}^{l}(B^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{l}B^{(i)}\Big)\Big\} \leqq a_{\xi_1}$$
$$\leqq \frac{1}{l}\Big\{U\Big(\sum_{i=1}^{l}(B^{(i)}+A_{\xi_1}^{(i)})\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{l}B^{(i)}\Big)\Big\}.$$

Quand nous posons $T(A)=V(B)+(t_1+t_2+\cdots+t_n)a_{\xi_1}$ pour tout élément A de la forme suivante

$$\text{(iii)} \qquad A=B+t_1A_{\xi_1}^{(1)}+t_2A_{\xi_1}^{(2)}+\cdots+t_nA_{\xi_1}^{(n)},$$
$$(B\in\mathcal{M}_1,\ A_{\xi_1}^{(i)}\cong A_{\xi_1};\ i=1,2,\ldots,n)$$

$T(A)$ est définie sur l'ensemble $\mathcal{M}_2$ de tous les éléments de la forme (iii) et elle jouit des propriétés (II_1), (II_2), (II_3), (II_4), (II_5) et (II_6), et de plus $T(A)=V(A)$ sur $\mathcal{M}_1$. En effet, il suffit de voir (II_6). Si nous remplaçons dans (ii) $B^{(i)}$ par $B^{(i)}/(t_1+t_2+\cdots+t_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, nous avons

$$\frac{1}{n}\Big\{-U\Big(-\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{B^{(i)}}{t_1+\cdots+t_n}+A_{\xi_1}^{(i)}\Big)\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{B^{(i)}}{t_1+\cdots+t_n}\Big)\Big\}$$
$$\leqq a_{\xi_1} \leqq \frac{1}{n}\Big\{U\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{B^{(i)}}{t_1+\cdots+t_n}+A_{\xi_1}^{(i)}\Big)\Big)-V\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{B^{(i)}}{t_1+\cdots+t_n}\Big)\Big\}.$$

Or, $t_1+t_2+\cdots+t_n \geqq 0$ entraine $(t_1+t_2+\cdots+t_n)na_{\xi_1} \leqq U\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(B^{(i)}+(t_1+t_2+\cdots+t_n)A_{\xi_1}^{(i)}\big)\Big)-V\big(\sum_{i=1}^{n}B^{(i)}\big)$, et donc $(t_1+t_2+\cdots+t_n)a_{\xi_1} \leqq U\big(B+(t_1+t_2+\cdots+t_n)A_{\xi_1}\big)-V(B)$, d'où $V(B)+(t_1+t_2+\cdots+t_n)a_{\xi_1} \leqq U(B+t_1A_{\xi_1}^{(1)}+t_2A_{\xi_1}^{(2)}+\cdots+t_nA_{\xi_1}^{(n)})$. De même, nous pouvons prouver (II_6) quand $(t_1+t_2+\cdots+t_n) \leqq 0$.

Le lemme est alors établi sur $\mathcal{M}_2$. De même, en employant l'induction transfini, nous pouvons donner $T(A)$ qui jouit des propriétés du lemme pour tous éléments de $\mathcal{M}^H$. C. Q. F. D.

Lemme 2. $T(A)$ du au-dessus est continue par rapport à la topologie uniforme.

En effet, supposons que $A, B \geqq 0$ en même temps. Si nous avons $\|(A-B)f\| \leqq \varepsilon\|f\|$ pour tous $f\in\mathfrak{H}$, nous avons $\big|\big((A-B)f,f\big)\big| \leqq \|(A-B)f\|\cdot\|f\| \leqq \varepsilon\|f\|^2$, et donc $(Af,f) \leqq (Bf,f)+\varepsilon\|f\|^2=\big((B+\varepsilon I)f,f\big)$. Par conséquent, $B+\varepsilon I-A \geqq 0$ et $T(B+\varepsilon I) \geqq T(A)$, ou $T(A)-T(B) \leqq \varepsilon$. Nous avons de même $T(A)-T(B) \geqq -\varepsilon$, d'où $|T(A)-T(B)| \leqq \varepsilon$.

Lemme 3. Soient A_n $(n=1,2,\ldots)$ et A les opérateurs hermitiens de $\mathcal{M}^H$, et B un élément de $\mathcal{M}$. Si A_n convergent vers A au sens de la topologie uniforme, $T(BA_n)$ et $T(A_nB)$ convergent respectivement vers $T(BA)$ et $T(AB)$ au même sens.

En effet, pour les nombres naturels n tels qu'on ait $\|A-A_n\| \leqq \varepsilon$, nous avons aussi $\|BA-BA_n\| \leqq \|B\|\cdot\|A-A_n\| \leqq \varepsilon\|B\|$, d'où $\varepsilon\|B\|-BA+BA_n \geqq 0$. D'après les propriétés (3), (4) de la trace, nous avons $T(BA)-T(BA_n) \leqq \varepsilon\|B\|$, et de même $T(BA_n)-T(BA) \leqq \varepsilon\|B\|$, ce qui entraine $|T(BA)-T(BA_n)| \leqq \varepsilon\|B\|$. Donc, $T(BA_n)$ convergent vers $T(BA)$. De même, $T(A_nB)$ convergent vers $T(AB)$. C. Q. F. D.

Lemme 4. Si E appartient à $\mathcal{M}^P$, nous avons $T(EB)=T(BE)$ pour tout élément B de $\mathcal{M}$.

En effet, puisque $(2E-I)$ est un élément de $\mathcal{M}^U$, nous avons $T\big((2E-I)B\big)=T\big(B(2E-I)\big)$, d'après $2T(EB)-T(B)=2T(BE)-T(B)$, nous avons $T(EB)=T(BE)$.

Lemma 5. Quels que soient les éléments A, B de $\mathcal{M}$, nous avons $T(AB)=T(BA)$.

En effet, puisque un élément A de $\mathcal{M}$ peut être représenté comme une somme de deux éléments de $\mathcal{M}^H$, d'aprés les propriétés (2) et (3) de $T(A)$, il suffit de démontrer pour le cas où A appartient à $\mathcal{M}^H$.

Soit $\{E(\lambda)\}(-c \leqq \lambda \leqq c)$ la resolution de l'unité d'un élément A de $\mathcal{M}^H$. En prenant λ_k $(k=0, 1, \dots, n)$ pour $\varepsilon > 0$ tels qu'on ait $-c=\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = c$ et $\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} \leqq \varepsilon$, nous posons $A^{K_\varepsilon}=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\big(E(\lambda_\nu)-E(\lambda_{\nu-1})\big)$, alors A^{K_ε} converge vers A au sens de le topologie uniforme quand ε tend vers infiniment à 0[4]. Nous avons $T(A^{K_\varepsilon}B)=T(BA^{K_\varepsilon})$ d'après les propriétés (2), (3) de $T(A)$ et le lemme 4, d'où $\lim_{\varepsilon\to 0} T(A^{K_\varepsilon}B)=T(AB)$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} T(BA^{K_\varepsilon})=T(BA)$ d'après le lemme 3, et donc nous avons $T(AB)=T(BA)$. C. Q. F. D.

Théorème 1. Il existe une trace pour les éléments de $\mathcal{M}$, quand $\mathcal{M}$ est du type fini.

Démonstration. Pour un élément A de $\mathcal{M}$, il existe B et C du $\mathcal{M}^H$ tels qu'on ait $A=B+iC$. Nous posons donc $T(A)=T(B)+iT(C)$. Il est alors facile de voir qu'elle jouit des propriétés (1)-(5), (7) et (8) de sa définition. Puis, (6) est demontré dans le lemme (5).

Théorème 2. Lorsque $\mathcal{M}$ est le type infini, il existe une fonction $T(A)$ qui remplit les conditions suivantes.

(1) *Il existe au moins un élément A de $\mathcal{M}$ tel que $T(A) \neq 0$ et ∞.*
(2) $T(\alpha A)=\alpha T(A)$ *pour un nombre complexe α.*
(3) $T(A+B)=T(A)+T(B)$.
(4) si $A \geqq 0$, *nous avons* $T(A) \geqq 0$.
(5) $T(A^*)=\overline{T(A)}$.
(6) $T(AB)=T(BA)$.
(7) $A \cong B$ *entraine* $T(A)=T(B)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer qu'il existe $T(A)$ sur $\mathcal{M}^H$ ayant des propriétés (1), (3), (4), (6), (7) et (2) pour un nombre réel a.

D'abord, nous définissons les éléments $\{B_a\}$ et les ensembles $\{\mathcal{N}_a\}$ employant l'induction transfini.

Nous rangeons tous les éléments de $\mathcal{M}^H$ en une suite bien ordonnée:

4) J. v. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann. (1929). p. 390.

(i′) $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \eta)$

Alors, nous désignons par B_1 le premier élément de la suite (i′) qui est positif et fini, et nous désignons par $\mathcal{N}_1$ tous les éléments de la forme $A=a_1B_1^{(1)}+a_2B_1^{(2)}+\cdots+a_nB_1^{(n)}$ où $B_1^{(i)}\cong B_1$ $(i=1,2,\dots,n)$ et a_i $(i=1,2,\dots,n)$ sont des nombres réels. Puis, en supposant que B_β et $\mathcal{N}_\beta$ soient déjà donnés pour $\beta<\alpha$. Nous prenons le premier élément B positif et fini de la suite (i′) tel que nous n'ayons pas $B_\alpha\geqq A$ et $B_\alpha\leqq A$ en même temps pour tout les combinaisons linéaires A des éléments des ensembles $\mathcal{N}_\beta$ $(\beta<\alpha)$ par rapport aux nombres réels et nous désignons par $\mathcal{N}_\alpha$ l'ensemble linéaire tous les éléments de la forme $A=a_1B_\alpha^{(1)}+a_2B_\alpha^{(2)}+\cdots+a_nB_\alpha^{(n)}$ où $B_\alpha^{(i)}\cong B_\alpha$ $(i=1,2,\dots,n)$ et a_i $(i=1,2,\dots,n)$ sont des nombres réels.

Maintenant, nous désignons par $\mathcal{M}_1$ de la combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{N}_\alpha$ $(\alpha<\eta)$ pour rapport aux nombres réels, et nous posons $U(A)=a_1+a_2+\cdots+a_n$ pour les éléments $A=a_1B_{\alpha_1}+a_2B_{\alpha_2}+\cdots+a_nB_{\alpha_n}$ de l'ensemble $\mathcal{M}_1$. Pour un élément A positif et fini de $\mathcal{M}^H$, nous choisissons B de l'ensemble $\mathcal{M}_1$ pour' U_i $(i=1,2,\dots,n)$ de $\mathcal{M}^U$ de la manière que la borne supérieure de $\sum_{i=1}^{n}U_1^{-1}U^{-1}AUU_i$ pour $U\in\mathcal{M}^U\leqq B$, et nous désignons par $U(A)$ la borne inférieure de $\frac{1}{n}U(B)$ quand n, U_1 et B se varient. Alors, $U(A)$ est dèfini sur l'ensemble tous les éléments finis de $\mathcal{M}_1$ et jouit des propriétés suivantes.

(I_1') $U(B)=1$.
(I_2') $U(tA)=tU(A)$ pour un nombre non-negatif t.
(I_3') $U(A+B)\leqq U(A)+U(B)$.
(I_4') $A\geqq 0$ entraine $U(A)\geqq 0$.
(I_5') $A\cong B$ entraine $U(A)=U(B)$.

Puis, nous posons $V(tA)=tU(A)$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_1$, $V(A)$ alors jouit des propriétés suivantes.

(II_1') $V(B_\alpha)=1$.
(II_2') $V(tA)=tV(A)$ pour un nombre réel t.
(II_3') $V(A+B)=V(A)+V(B)$.
(II_4') $A\geqq 0$ entraine $V(A)\geqq 0$,
(II_5') $A\cong B$ entraine $V(A)=V(B)$.
(II_6') $V(A)\leqq U(A)$ pour chaque élément de $\mathcal{M}_1$.

Or nous pouvons étendre $V(A)$ sur tous les éléments finis de $\mathcal{M}^H$ de même manière que nous avons fait dans le démonstration du lemme 1. D'où $T(A)$ ainsi obtenue jouit des (II_1')–(II_6') sur tous les éléments positifs et finis de $\mathcal{M}^H$ et $T(A)=V(A)$ par chaque élément A de $\mathcal{M}_1$.

Pour les éléments infinis A de l'ensemble $\mathcal{M}^H$, il suffit de poser $T(A)=\infty$. $T(A)$ jouit alors des propriétés (1), (2), (3), (4), et (7) sur l'ensemble $\mathcal{M}^H$ et de plus d'après lemmes 2, 3, 4 et 5 nous avons vu qu'il jouit des propriétés (5) et (6).

Nous avons pour le cas du type purement infini le

Théorème 3. Il n'existe aucune fonction qui remplit les conditions (1)-(7) *du théorème précédent quand* $\mathcal{M}$ *est du type purement infini.*

Nous envisageons ensuite la représentation intégrale de la trace en se servant le lemme 2.

Théorème 4. Lorsque $\mathcal{M}^H$ est le type fini, la trace $T(A)$ sur un élément A de $\mathcal{M}^H$ peut être représentée par l'intégral de Riemann-Stieltjes comme il suite

$$(*) \qquad T(A)=\int_{-c}^{c} \lambda dT\big(E(\lambda)\big).$$

En effet, quand nous prenons A^{K_ε} pour A de même que nous avons écrit dans la démonstration de lemme 5, alors A^{K_ε} converge vers A au sens de la topologie uniforme quand ε tend vers infiniment à 0. Or, comme nous avons d'après lemme 2 $\lim_{\varepsilon\to 0} T(A^{K_\varepsilon})=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum \lambda_\nu\Big\{T\big(E(\lambda_\nu)\big)-T\big(E(\lambda_{\nu-1})\big)\Big\}=T(A)$, $T(A)$ peut être representée par l'intégrale (*) donnée au-dessus.

Remarque. Quand $\mathcal{M}$ est de type fini, nous pouvons introduire une dimension numérique d'après le théorème 1. Pour cela, il suffit de poser pour $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ $D(\mathfrak{M})=T(P_{\mathfrak{M}})$ où $P_{\mathfrak{M}}$ est l'opérateur projectif de $\mathfrak{M}$.

Nous discuterons sur cette fonction dans la note suivante.